Chương 1

KHÁI NIỆM VỀ SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

I. KHÁI NIỆM SAI SỐ :

Trong các bài toán kỹ thuật thường chúng ta không thể xác định được giá trị chính xác của 1 đại lượng mà chỉ làm việc với giá trị gần đúng của nó. Độ sai lệch giữa giá trị gần đúng và giá trị chính xác gọi là sai số.

Ta có 4 loại sai số :

- Sai số giả thiết
- Sai số số liệu ban đầu
- Sai số phương pháp
- Sai số tính toán

Sai số giả thiết : Các giả thiết dùng để mô hình hóa bài toán thường thiếu chính xác, các giả thiết này được chấp nhận khi xây dựng mô hình. Sai số này gọi là sai số giả thiết

Sai số số liệu ban đầu : Các số liệu ban đầu dùng để giải bài toán thường thu được thông qua đo đạc hay thực nghiệm. Các số này phụ thuộc vào dụng cụ đo, thực nghiệm nên không được chính xác gọi là sai số số liệu ban đầu.

Sai số phương pháp : Các phương pháp dùng để giải các bài toán kỹ thuật thường là các phương pháp giải xấp xỉ gần đúng, mỗi phương pháp có 1 sai số nhất định nào đó, sai số này gọi là sai số phương pháp

Sai số tính toán : Tính toán bằng máy tính thường chỉ sử dụng 1 số hữu hạn các chữ số hoặc làm tròn số, các sai số này tích lũy trong quá trình tính toán gọi là sai số tính toán hay sai số làm tròn.

II. CÁCH BIỂU DIỄN SAI SỐ :

Gọi A là số chính xác của bài toán

Số a gọi là số gần đúng của A nếu nó xấp xỉ A

ký hiệu $a \approx A$

Đại lương $\Delta = | a - A |$
gọi là sai số thực sự của số gần đúng a

1. Sai số tuyệt đối

Trong thực tế do không tính được A, ta tìm 1 số dương Δ_a càng bé càng tốt thoả

$$\mathbf{|\,a - A\,| \le \Delta_a}$$

Δ_a gọi là **sai số tuyệt đối** của số gần đúng a

Ký hiệu $A = a \pm \Delta_a$

2. sai số tương đối :

Sai số tương đối của số gần đúng a là số dương δ_a tính theo công thức

$$\boxed{\delta_a = \Delta_a \ / |a|}$$

Ví dụ :

Giả sử $A = \pi$;

$a = 3.14$ là số gần đúng của π

Xác định sai số

Giải

Ta có

$\pi = 3.14159265358979323846264338327...$

$\Rightarrow \quad 3.14 - 0.01 < \pi < 3.14 + 0.01$

$\Rightarrow \quad |\,3.14 - \pi\,| < 0.01$

$\Rightarrow \quad \Delta_a = 0.01 \qquad \delta_a = 0.3185\%$

Mặc khác

$3.14 - 0.002 < \pi < 3.14 + 0.002$

$\Rightarrow \quad \Delta_a = 0.002 \qquad \delta_a = 0.0637\%$

Do đó cùng 1 giá trị gần đúng có thể có nhiều sai số tuyệt đối khác nhau, trong ví dụ này, sai số 0.002 là tốt hơn

Ví dụ : Cho a = 1.85 với sai số tương đối là 0.12%, tính sai số tuyệt đối

$$\Delta_a = |a| * \delta_a$$

$$= 1.85 * 0.12 /100 = 0.00222$$

3. Sai số của một hàm :

Cho hàm $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Mỗi biến x_i có sai số Δx_i

Sai số tuyệt đối

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}$$

Sai số tương đối

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial (\ln f)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}$$

Ví dụ : Cho $A = 15.00 \pm 0.002$

$B = 0.123 \pm 0.001$ $C = 13.00 \pm 0.05$

Tính sai số tuyệt đối

1. $x = a + b$
2. $y = 20a - 10b + c$
3. $z = a + bc$

Giải

1. $\Delta_x = \Delta_a + \Delta_b = 0.002 + 0.001 = 0.003$
2. $\Delta_y = 20\Delta_a + 10\,\Delta_b + \Delta_c = 0.1$
3. $\Delta_z = \Delta_a + |c|\,\Delta_b + |b|\,\Delta_c = 0.02115$

Ví dụ : Diện tích đường tròn $S = \pi R^2$

với $\pi = 3.14 \pm 0.002$ và $R = 5.25 \pm 0.001$ m

Tính sai số của S

Giải :

$S = 3.14 \times (5.25)^2 = 86.54625$

sai số tuyệt đối

$$
\begin{aligned}
\Delta_S &= R^2 * \Delta_\pi + 2\pi R * \Delta_R \\
&= (5.25)^2 x 0.002 + 2 x 3.14 x 5.25 x 0.001 \\
&= 0.088095
\end{aligned}
$$

III. BIỂU DIỄN SỐ THẬP PHÂN

Số thập phân a được biểu diễn dưới dạng

$$a = a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-n}$$

$$= \sum a_k 10^k$$

1. Làm tròn số

Làm tròn số là bỏ 1 số các chữ số lẻ bên phải để được 1 số ngắn gọn hơn và gần đúng với a.

Giả sử ta muốn làm tròn đến chữ số lẻ thứ k ($1 \leq k \leq n$).

xét 2 số

$$a^- = a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-k}$$

$$a^+ = a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots (a_{-k}+1)$$

chọn số làm tròn là a^- hoặc a^+ theo điều kiện

$$\tilde{a} = \begin{cases} a^- \text{ nếu } |a^- - a| < |a^+ - a| \\ a^+ \text{ nếu } |a^+ - a| < |a^- - a| \end{cases}$$

Ví dụ : Cho $a = 456.12345678$

- Làm tròn với 2 chữ số lẻ

$a^- = 456.12 \qquad |a^- - a| = 0.00345678$

$a^+ = 456.13 \qquad |a^+ - a| = 0.00654322$

Vậy $\tilde{a} = a^- = 456.12$

- Làm tròn với 4 chữ số lẻ

$a^- = 456.1234 \qquad |a^- - a| = 0.00005678$

$a^+ = 456.1235 \qquad |a^+ - a| = 0.00004322$

Vậy $\tilde{a} = a^+ = 456.1235$

Cách làm tròn đơn giản hơn

Nếu a_{-k-1} (chữ số sau chữ số lẻ thứ k)

< 5 : $\tilde{a} = a^-$

≥ 5 : $\tilde{a} = a^+$

- Sai số làm tròn

Đặt $\theta = |\tilde{a} - a|$

Ta có $|\tilde{a} - A| \le |\tilde{a} - a| + |a - A| = \theta + \Delta_a$

Vậy sai số làm tròn :

$$\boxed{\Delta_{\tilde{a}} = \theta + \Delta_a}$$

<u>* NX :</u> Ta có $\Delta_{\tilde{a}} \ge \Delta_a$. Vậy khi làm tròn sai số sẽ tăng lên, nên trong tính toán ta tránh làm tròn các phép toán trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng.

Ví dụ : Cho số CX A, a = 187.123456 là số gần đúng với sai số là 0.0001. Gọi ã là số làm tròn của a với 4 chữ số lẻ. Tính sai số của ã so với A

giải

Sai số $\Delta_{\tilde{a}} = \theta + \Delta_a$

$\theta = | 187.1235 - 187.123456 | = 0.000044$

Vậy $\Delta_{\tilde{a}} = 0.000044 + 0.0001 = 0.000144$

Chú ý :

Trường hợp làm tròn trong bất đẳng thức, ta dùng khái niệm làm tròn lên và làm tròn xuống

- Làm tròn lên : $\tilde{a} = a^+$, áp dụng cho các số ở vế lớn hơn

- Làm tròn xuống : $\tilde{a} = a^-$, áp dụng cho các số ở vế nhỏ hơn

Ví dụ :

- $a < 13.9236$

làm tròn lên với 2 chữ số lẻ ta được

$$a < 13.93$$

- $b > 78.6789$

làm tròn xuống ta được

$$b > 78.67$$

2. Chữ số có nghĩa :

là những chữ số tính từ chữ số khác 0 đầu tiên từ trái sang.

Ví dụ :

10.20003 có 7 chữ số có nghĩa

001234.34 có 6 chữ số có nghĩa

0.010203 có 5 chữ số có nghĩa

10.20300 có 7 chữ số có nghĩa

3. Chữ số đáng tin :

Cho $a \approx A$ với sai số Δ_a .

Chữ số a_k gọi là chữ số đáng tin nếu

$$\Delta_a \leq 10^k / 2$$

hay

$$k \geq \log(2\Delta_a)$$

Ví dụ : Tìm số chữ số đáng tin của a

1. $a = 12.3456$ với $\Delta_a = 0.0044$
2. $a = 12.3456$ với $\Delta_a = 0.0062$

giải

1. Chữ số a_k là đáng tin nếu

$$\Delta_a = 0.0044 \leq ½\ 10^k$$

$$\Rightarrow \quad k \geq \log(0.0088) = -2.0555$$

vậy ta có 4 chữ số đáng tin 1, 2, 3, 4.

2. $$\Delta_a = 0,0062 \leq ½\ 10^k$$

$$\Rightarrow \quad k \geq \log(0.0124) = -1.9065$$

vậy ta có 3 chữ số đáng tin 1, 2, 3