CHƯƠNG 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

I. ĐẶT BÀI TOÁN :

Hệ phương trình tuyến tính n pt và n ẩn có dạng

$$Ax = b$$

với

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Các phương pháp giải

- Phương pháp giải chính xác
  - Phương pháp Gauss
  - Phương pháp Gauss-Jordan
  - Phương pháp nhân tử LU
  - Phương pháp Cholesky
- Phương pháp giải gần đúng
  - Phương pháp lặp Jacobi
  - Phương pháp lặp Gauss-Seidel

II. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

1. Các dạng ma trận đặc biệt :

a. Ma trận chéo :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i$

Nghiệm $x_i = b_i/a_{ii}$

b. Ma trận tam giác dưới

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i$$

Phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_k = \dfrac{1}{a_{kk}} [b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j], k = 2, n \end{cases}$$

c. Ma trận tam giác trên :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i$$

Phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_k = \dfrac{1}{a_{kk}}[b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j], k = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

2. Phương pháp Gauss :

Ta sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo dòng để chuyển ma trận A về ma trân tam giác trên

Các phép biến đổi sơ cấp theo dòng

- hoán chuyển 2 dòng
- nhân 1 dòng với 1 số khác 0
- cộng 1 dòng với dòng khác

Ví dụ : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Giải

$$[A/b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[h_4=h_4-h_1]{\substack{h_2=h_2-2h_1 \\ h_3=h_3-h_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_4=h_4/2]{h_2 \leftrightarrow h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{h4=h4+h3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Giải pt ma trận tam giác trên, ta được nghiệm

$$x = (-7, 3, 2, 2)^t$$

III. PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LU

Phân tích ma trận A thành tích 2 ma trận L và U

$$A = LU$$

L : ma trận tam giác dưới

U : ma trận tam giác trên

Phương trình $Ax = b \Leftrightarrow L(Ux) = b$

Ta đưa về giải 2 hệ phương trình

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Phương pháp Doolittle :

Giả sử A ma trận không suy biến và $a_{11} \neq 0$

Ta có thể phân tích A thành

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trân Δ dưới

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trân Δ trên

Các phần tử của L và U được xác định theo công thức

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j}, \quad 1 \le j \le n \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}, \quad 2 \le i \le n \\ u_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad 1 < i \le j \\ l_{ij} = \dfrac{1}{u_{jj}} [a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}], \quad 1 < j < i \end{cases}$$

Ví dụ : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Giải

Ta phân tích

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = -2$$

$$l_{32} = \frac{1}{u_{22}}(a_{32} - l_{31}u_{12}) = -1$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 3$$

Giải hệ Ly = b

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Giải hệ Ux = y

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nghiệm $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

TH đặc biệt : A ma trận 3 đường chéo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ta phân tích A thành LU với

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Các phần tử của L và U được xác định theo công thức

$$\begin{cases} u_{11} = a_{11}, u_{12} = a_{12}, l_{21} = \dfrac{a_{21}}{u_{11}} \\ u_{ii} = a_{ii} - l_{i\,i-1}u_{i-1\,i}, \quad i = 2,n \\ u_{i\,i+1} = a_{i\,i+1}, \quad i = 2,n-1 \\ l_{i+1\,i} = \dfrac{a_{i+1\,i}}{u_{ii}}, \quad i = 2,n-1 \end{cases}$$

Ví dụ : Giải hệ phương trình Ax = b

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Giải

Ta phân tích

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3/2$$

$$u_{23} = a_{23} = -1, \quad l_{32} = \frac{a_{32}}{u_{22}} = -2/3$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{32}u_{23} = 4/3$$

Giải hệ Ly = b

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

Giải hệ Ux = y

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10/3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Nghiệm $x_1 = 5/2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5/2$

III. PHƯƠNG PHÁP CHOLESKY

Định nghĩa :

- Ma trân A gọi là đối xứng nếu

$$A = A^t$$

- Ma trân A gọi là xác định dương nếu

$$x^t Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j > 0, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \in R^n, x \neq 0$$

Để kiểm tra xác định dương, ta dùng đình lý sau:

Định lý :

Ma trận A là xác định dương khi và chỉ khi tất cả các định thức con chính của nó đều dương

Ví dụ : Kiểm tra tính xác định dương của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải

Các định thức con chính: $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Vậy A là xác định dương

Định lý (Cholesky) :

Nếu A ma trận <u>đối xứng và xác định dương</u>, thì tồn tại ma trận Δ dưới, khả đảo B sao cho

$$A = BB^t$$

Ma trận $B = (b_{ij})$ tìm theo công thức sau :

$$\begin{cases} b_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ b_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{b_{11}}, \ 2 \le i \le n \\ b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2}, \ \ 2 \le i \le n \\ b_{ij} = \dfrac{1}{b_{jj}}[a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk}], \ 2 \le \ j \le i \end{cases}$$

Ví dụ : Giải hệ phương trình Ax = b

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Giải

Ta có A ma trận đối xứng và xác định dương

Phân tích A = BB^t

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b_{22} & 0 \\ -1 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Các hệ số

$$\begin{cases} b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2} = 1 \\ b_{32} = \dfrac{1}{b_{22}}[a_{32} - b_{31}b_{21}] = 1 \\ b_{33} = \sqrt{a_{33} - b_{31}^2 - b_{32}^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Giải hệ By = b

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Giải hệ $B^t x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Nghiệm $x_1 = 3$, $x_2 = -1/2$, $x_3 = 3/2$

IV. PHƯƠNG PHÁP LẶP

1. Chuẩn :

a. Chuẩn vector :

Định nghĩa :

Chuẩn của vector $x \in R^n$ là hàm số thực ký hiệu là $||x||$, thỏa 3 điều kiện sau :

(i) $||x|| \geq 0, \forall x \in R^n$ và $||x|| = 0 \Leftrightarrow x=0$

(ii) $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||, \forall x \in R^n, \forall \lambda \in R$

(iii) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x,y \in R^n$

Có nhiều công thức chuẩn khác nhau, xét 2 công thức

$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \le x \le n} \{ | x_i | \}$$

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$$

Dễ dàng kiểm tra $||x||_\infty$, $||x||_1$ là các chuẩn gọi là chuẩn ∞ và chuẩn 1

b. Chuẩn ma trận :

Định nghĩa :

Chuẩn của ma trân A được xác định theo công thức

$$\| A \| = \max_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \max_{\|x\|=1} \| Ax \|$$

Định lý : Cho ma trận A = (a_{ij}), ta có

$$\| A \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \{ \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \}$$

$$\| A \|_1 = \max_{1 \le j \le n} \{ \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \}$$

c. Hội tụ theo chuẩn :

Định nghĩa :

Dãy các vector $\{x^{(m)}\} \in R^n$ hội tụ về x theo chuẩn nếu $||x^{(m)} - x|| \to 0$ khi $m \to \infty$

Định lý :

Dãy $\{x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})\} \in R^n$ hội tụ về $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ theo chuẩn nếu và chỉ nếu dãy $\{x_k^{(m)}\}$ hội tụ về x_k khi $m \to \infty$, $\forall k = 1,n$

2. Phương pháp lặp :

Ta chuyển hệ pt về dạng

$$x = Tx + c$$

Với T là ma trận vuông cấp n và c là 1 vector

Để tìm nghiệm gần đúng, với vector ban đầu $x^{(0)}$, ta xây dựng dãy lặp theo công thức

$$x^{(m)} = Tx^{(m-1)} + c, \ \forall m=1,2,\ldots$$

Ta cần khảo sát sự hội tụ của dãy $\{x^{(m)}\}$

Ta có định lý sau

Định lý :

Nếu $||T|| < 1$ thì dãy lặp $x^{(m)}$ sẽ hội tụ về nghiệm x của hệ pt, với mọi vector ban đầu $x^{(0)}$.

Ta có công thức đánh giá sai số :

$$(1) \quad \|x^{(m)} - x\| \le \frac{\|T\|^m}{1 - \|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \quad \textit{tiền nghiệm}$$

hoặc

$$(2) \quad \|x^{(m)} - x\| \le \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \|x^{(m)} - x^{(m-1)}\| \quad \textit{hậu nghiệm}$$

V. PHƯƠNG PHÁP LẶP JACOBI

Ta phân tích

$$A = D - L - U$$

trong đó

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \textit{ma trận chéo}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{ma trận } \Delta \textit{ dưới}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{ma trận } \Delta \textit{ trên}$$

Phương trình $\quad Ax = b$

$$\Leftrightarrow \quad (D-L-U)x = b$$

$$\Leftrightarrow \quad Dx = (L+U)x + b$$

$$\Leftrightarrow \quad x = D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow \quad x = Tx + c$$

với $T = D^{-1}(L+U)$ và $c = D^{-1}b$

pp lặp theo phân tích trên gọi là <u>pp lặp Jacobi</u>

Bây giờ ta tìm điều kiện để pp lặp Jacobi HT

Định nghĩa :

Ma trận A gọi là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt nếu nó thỏa điều kiện sau :

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \forall i = 1, n$$

Nhận xét :

Nếu A là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt thì

$\det A \neq 0$ và $a_{ii} \neq 0 \ \forall i=1,n$

Định lý :

Nếu A là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt, thì pp lặp Jacobi hội tụ với mọi giá trị ban đầu $x^{(0)}$

Ta có công thức lặp Jacobi

$$x^{(m)} = Tx^{(m-1)} + c, \ \forall m=1,2,...$$

$$x_i^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}}[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_i^{(m-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_i^{(m-1)} + b_i], \forall i = 1, n$$

CM

Ta có $x^{(m)} = Tx^{(m-1)} + c$, $T = D^{-1}(L+U)$ và $c = D^{-1}b$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/a_{nn} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ .. \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

A ma trân đường chéo trội nghiêm ngặt nên

$$\| T \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \{ \sum_{j=1, j \ne i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \} < 1$$

$\Rightarrow$ pp lặp hội tụ

Ví dụ : Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 = 9 \end{cases}$$

a. Tìm nghiệm gần đúng $x^{(5)}$ với vector ban đầu $x^{(0)} = 0$

b. Tính ma trận T và c

c. Tính sai số của nghiệm $x^{(5)}$

a.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \quad \textit{ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt}$$

Công thức lặp Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{(m)} = \dfrac{1}{10}(\qquad - x_2^{(m-1)} + x_3^{(m-1)} + 7) \\ x_2^{(m)} = \dfrac{1}{10}(-x_1^{(m-1)} \qquad - x_3^{(m-1)} + 8) \\ x_3^{(m)} = \dfrac{1}{10}(x_1^{(m-1)} - x_2^{(m-1)} \qquad + 9) \end{cases}$$

m	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(m)}$	0					
$x_2^{(m)}$	0					
$x_3^{(m)}$	0					

b. Ta có

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

c. Công thức sai số

$$\| x^{(5)} - x \| \leq \frac{\| T \|}{1 - \| T \|} \| x^{(5)} - x^{(4)} \|$$

Ta có $\|T\|_\infty = 0.2$, nên

$$\| x^{(5)} - x \| \leq \frac{0.2}{0.8} 4.9 * 10^{-4} = 0.1225 * 10^{-3}$$

VI. Phương pháp lặp Gauss-Seidel :

Ta phân tích

$$A = D - L - U$$

như trong phần trước

Phương trình $\quad Ax = b$

$$\Leftrightarrow \quad (D-L-U)x = b$$

$$\Leftrightarrow \quad (D-L)x = Ux + b$$

$$\Leftrightarrow \quad x = (D-L)^{-1}Ux + (D-L)^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow \quad x = Tx + c$$

với $T = (D-L)^{-1}U$ và $c = (D-L)^{-1}b$

pp lặp theo phân tích này gọi là <u>pp lặp Gauss-Seidel</u>

Định lý :

Nếu A là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt, thì pp lặp Gauss-Seidel hội tụ với mọi giá trị ban đầu $x^{(0)}$

Ta có công thức lặp Gauss-Seidel

$$x^{(m)} = Tx^{(m-1)} + c, \ \forall m=1,2,...$$

$$x_i^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}}[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(m-1)} + b_i], \forall i = \overline{1,n}$$

Ví dụ : Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 20x_1 - x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + 20x_2 - x_3 = 13 \\ -2x_1 - x_2 + 20x_3 = 14 \end{cases}$$

a. Tìm nghiệm gần đúng $x^{(4)}$ với vector ban đầu $x^{(0)} = 0$

b. Tính ma trận T và c

c. Tính sai số của nghiệm $x^{(4)}$

a.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -1 & 2 \\ 1 & 20 & -1 \\ -2 & -1 & 20 \end{pmatrix} \quad \textit{ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt}$$

Công thức lặp Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(m)} = \dfrac{1}{20}(\qquad + x_2^{(m-1)} - 2x_3^{(m-1)} + 12) \\ x_2^{(m)} = \dfrac{1}{20}(-x_1^{(m)} \qquad + x_3^{(m-1)} + 13) \\ x_3^{(m)} = \dfrac{1}{20}(2x_1^{(m)} + x_2^{(m)} \qquad + 14) \end{cases}$$

m	0	1	2	3	4
$x_1^{(m)}$	0				
$x_2^{(m)}$	0				
$x_3^{(m)}$	0				

b. Ta có

$$D-L=\begin{pmatrix}20 & 0 & 0\\ 1 & 20 & 0\\ -2 & -1 & 20\end{pmatrix} \Rightarrow (D-L)^{-1}=\begin{pmatrix}0.05 & 0 & 0\\ -0.0025 & 0.05 & 0\\ 0.004875 & 0.0025 & 0.05\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow T=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix}0 & 0.05 & -0.1\\ 0 & -0.0025 & 0.055\\ 0 & 0.004875 & -0.00725\end{pmatrix}$$

$$c=(D-L)^{-1}b=\begin{pmatrix}0.6\\ 0.62\\ 0.791\end{pmatrix}$$

c. Công thức sai số

$$\| x^{(4)} - x \| \le \frac{\| T \|}{1 - \| T \|} \| x^{(4)} - x^{(3)} \|$$

Ta có $\|T\|_\infty = 0.15$, nên

$$\| x^{(4)} - x \| \le \frac{0.15}{0.85} 3.5123 * 10^{-5} = 0.6199 * 10^{-5}$$

VII. Hệ pt ổn định và số điều kiện :

1. Hệ pt ổn định :

Xét hệ phương trình $Ax = b$

Định nghĩa :

Hệ phương trình gọi là ổn định nếu mọi thay đổi nhỏ của A hay b thì nghiệm của hệ chỉ thay đổi nhỏ

Ví dụ : Xét hệ phương trình Ax = b với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.01 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.01 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm $x = (1, 1)^T$

Thay đổi

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.1 \end{pmatrix}$$

Nghiệm của hệ : $x=(-17, 10)^T$

Ta thấy nghiệm của hệ khác rất xa khi b thay đổi nhỏ. Vậy hệ không ổn định

Ví dụ : Xét hệ phương trình Ax = b với

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Hệ có nghiệm $x = (1, 1, 1, 1)^T$

Thay đổi A một ít
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.98 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix}$$

Nghiệm của hệ : $x=(-81, 137, -34, 22)^T$

Ta thấy nghiệm của hệ khác rất xa khi A thay đổi nhỏ. Vậy hệ không ổn định

2. Số điều kiện :

Ta tìm điều kiện để hệ ổn định

Định nghĩa : Số

$$\boxed{k(A) = \|A\| \, \|A\|^{-1}}$$

Gọi là số điều kiện của ma trận A

Ta có các tính chất :

$$(i) \quad 1 \le k(A)$$

$$(ii) \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le k(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$(iii) \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \le k(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A + \Delta A\|}$$

Nhận xét :

Số điều kiện của ma trận đặc trưng cho tính ổn định của hệ phương trình

- k(A) càng gần 1 thì hệ càng ổn định
- k(A) càng xa 1 thì hệ càng không ổn định

Ví dụ :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.01 \end{pmatrix}$$

Ta có
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 201 & -200 \\ -100 & 100 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ k(A) = 3.01 x 401 = 1207.01 >> 1

Vậy hệ không ổn định

Ví dụ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/13 & -5/13 & 3/13 \\ -5/13 & 11/13 & -4/13 \\ 3/13 & -4/13 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ k(A) = 6 x 20/13 = 9.2308 >> 1

Vậy hệ không ổn định