# Chương 4

# NỘI SUY VÀ XẤP XỈ HÀM

## I. ĐẶT BÀI TOÁN :

Để tính giá trị của một hàm liên tục bất kỳ, ta có thể xấp xỉ hàm bằng một đa thức, tính giá trị của đa thức từ đó tính được giá trị gần đúng của hàm

Xét hàm $y = f(x)$ cho dưới dạng bảng số

| $x$ | $x_o$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_o$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_n$ |

- Các giá trị $x_k$, $k = 0, 1, .., n$ được sắp theo thứ tự tăng dần gọi là các điểm nút nội suy
- Các giá trị $y_k = f(x_k)$ là các giá trị cho trước của hàm tại $x_k$

**Bài toán** : xây dựng 1 đa thức $p_n(x)$ bậc $\leq n$ thoả điều kiện $p_n(x_k) = y_k$, $k=0,1,..\ n$. Đa thức này gọi là đa thức nội suy của hàm f(x).

# II. ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE:

Cho hàm y = f(x) và bảng số

| x | $x_o$ | $x_1$ | $x_2$ | . . . | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $y_o$ | $y_1$ | $y_2$ | . . . | $y_n$ |

Ta xây dựng đa thức nội suy hàm f(x) trên $[a,b]=[x_0, x_n]$.

Đặt

$$p_n^{(k)}(x) = \frac{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (x - x_i)}{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)}$$

$$= \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

Ta có

$$p_n^{(k)}(x_i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Đa thức

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_n^{(k)}(x)\, y_k$$

có bậc $\leq$ n và thỏa điều kiện $L_n(x_k) = y_k$

gọi là đa thức nội suy Lagrange của hàm f

**Ví dụ :** Cho hàm f và bảng số

| x | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| y | 1 | -1 | 2 |

Xây dựng đa thức nội suy Lagrange và tính gần đúng f(2).

Giải

n = 2

$$p_n^{(0)}(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)$$

$$p_n^{(1)}(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x)$$

$$p_n^{(2)}(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}(x^2 - x)$$

Đa thức nội suy Lagrange

$$L_n(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{2}(x^2 - 3x) + \frac{1}{3}(x^2 - x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{19}{6}x + 1$$

$f(2) \approx L_n(2) = -2/3$

## ❖ Cách biểu diễn khác :

Đặt $\omega(x) = (x- x_0)(x- x_1) \ldots.\ (x- x_n)$

$$\omega'(x) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (x - x_i)$$

$$\omega'(x_k) = (x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k- x_n)$$

$$\Rightarrow \quad p_n^{(k)}(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}$$

$$\Rightarrow \quad L_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{\omega'(x_k)(x - x_k)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{D_k}}$$ với $D_k = \omega'(x_k)\ (x-x_k)$

# Để tính giá trị của $L_n(x)$, ta lập bảng

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | .... | $x_n$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $x - x_0$ | $x_0 - x_1$ | .... | $x_0 - x_n$ | $D_0$ | |
| $x_1$ | $x_1 - x_0$ | $x - x_1$ | .... | $x_1 - x_n$ | $D_1$ | tích dòng |
| ... | .... | .... | .... | .... | ... | |
| $x_n$ | $x_n - x_0$ | $x_n - x_1$ | .... | $x - x_n$ | $D_n$ | |
| | | | | | $\omega(x)$ | tích đường chéo |

**Ví dụ :** Cho hàm f và bảng số

| x | -9 | -7 | -4 |
|---|---|---|---|
| y | -1 | -4 | -9 |

Tính gần đúng f(-6)

Ta lập bảng tại x = -6

| x = -6 | -9 | -7 | -4 | |
|---|---|---|---|---|
| -9 | 3 | -2 | -5 | 30 |
| -7 | 2 | 1 | -3 | -6 |
| -4 | 5 | 3 | -2 | -30 |
| | | | | -6 |

Vậy $f(-6) \approx L_2(-6) = -6(-1/30+4/6+9/30) = -5.6$

**Ví dụ :** Cho hàm f và bảng số

| x | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 1 | 2 | -1 |

Tính gần đúng f(2)

Ta lập bảng tại x = 2

| x = 2 | 0 | 1 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | -1 | -3 | -4 | -24 |
| 1 | 1 | 1 | -2 | -3 | 6 |
| 3 | 3 | 2 | -1 | -1 | 6 |
| 4 | 4 | 3 | 1 | -2 | -24 |
| | | | | | 4 |

Vậy $f(2) \approx L_3(2) = 4(-1/24 + 1/6 + 1/3 + 1/24) = 2$

• **TH đặc biệt :** các điểm nút cách đều với bước $h = x_{k+1} - x_k$

Đặt $$q = \frac{(x - x_0)}{h}$$

Ta có $x_k = x_o + kh$

$\Rightarrow$ $x - x_k = x - x_o - kh = (q-k)h$

$x_i - x_j = (x_o + ih) - (x_o + jh) = (i-j)h$

$\Rightarrow$ $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \;....\; (x - x_n) = q(q-1)...(q-n)h^{n+1}$

$$\omega'(x_k) = (x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)$$

$$= k.(k-1) \ldots 1.(-1)(-2) \ldots (k-n)h^n$$

$$= (-1)^{n-k}\, k!\, (n-k)!\, h^n$$

$$L_n(x) = \omega(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{\omega'(x_k)(x-x_k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_n(x) = q(q-1)\ldots(q-n)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}y_k}{k!(n-k)!(q-k)}}$$

**Ví dụ :** Cho hàm f và bảng số

| x | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 |
|---|---|---|---|---|
| y | 15 | 18 | 19 | 24 |

Tính gần đúng f(1.25)

**giải**

Ta có n = 3 x = 1.25

h = 0.1 q = (1.25-1.1)/0.1 = 1.5

$$L_n(1.25) = (1.5)(0.5)(-0.5)(-1.5)[-\frac{15}{3!(1.5)} + \frac{18}{2!(0.5)} - \frac{19}{2!(-0.5)} + \frac{24}{3!(-1.5)}]$$

$$= 18.375$$

Vậy $f(1.25) \approx 18.375$

## ❖ Công thức đánh giá sai số :

Giả sử hàm f(x) có đạo hàm đến cấp n+1 liên tục trên [a,b].

Đặt $$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Ta có công thức sai số

$$\boxed{|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|}$$

**Ví dụ :** Cho hàm $f(x)=2^x$ trên đoạn [0,1]. Đánh giá sai số khi tính gần đúng giá trị hàm tại điểm $x=0.45$ sử dụng đa thức nội suy Lagrange khi chọn các điểm nút $x_o=0$, $x_1=0.25$, $x_2=0.5$, $x_3=0.75$, $x_4=1$

Giải

Ta có $n = 4$, $f^{(5)}(x) = (\ln 2)^5 2^x$

$\Rightarrow M_5 = \max |f^{(5)}(x)| = 2(\ln 2)^5$

công thức sai số

$$|f(x)-L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|$$

$$= \frac{2(\ln 2)^5}{5!}|(0.45)(0.20)(-0.05)(-0.30)(-0.55)| = 0.198x10^{-5}$$

# III. ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON:

## 1. Tỉ sai phân :

Cho hàm y = f(x) xác định trên $[a,b]=[x_o, x_n]$ và bảng số

| x | $x_o$ | $x_1$ | $x_2$ | . . . | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $y_o$ | $y_1$ | $y_2$ | . . . | $y_n$ |

Đại lượng $$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

gọi là tỉ sai phân cấp 1 của hàm f trên $[x_k,x_{k+1}]$

## Tỉ sai phân cấp 2

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

## Bằng qui nạp ta định nghĩa tỉ sai phân cấp p

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+p}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+p}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+p-1}]}{x_{k+p} - x_k}$$

**Ví dụ :** Cho hàm f và bảng số

| x | 1.0 | 1.3 | 1.6 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0.76 | 0.62 | 0.46 | 0.28 |

Tính các tỉ sai phân

Giải : ta lập bảng các tỉ sai phân

| k | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f[x_k,x_{k+1}]$ | $f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$ | $f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0 | 0.76 | | | |
| 1 | 1.3 | 0.62 | | | |
| 2 | 1.6 | 0.46 | | | |
| 3 | 2.0 | 0.28 | | | |

## 2. Đa thức nội suy Newton :

Tỉ sai phân cấp 1

$$f[x,x_0] = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

$$\Rightarrow f(x) = y_0 + f[x,x_0](x - x_0)$$

Tỉ sai phân cấp 2

$$f[x,x_0,x_1] = \frac{f[x_0,x_1] - f[x,x_0]}{x_1 - x}$$

$$\Rightarrow f[x,x_0] = f[x_0,x_1] + f[x,x_0,x_1](x - x_1)$$

nên $f(x) = y_0 + f[x_0,x_1](x - x_0) + f[x,x_0,x_1](x - x_0)(x - x_1)$

Tiếp tục bằng qui nạp ta được

$$f(x) = y_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$+ f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$
$$+ f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Đặt

$$\aleph_n^{(1)}(x) = y_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$+ f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$
$$\Re_n(x) = f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Ta được $$\boxed{f(x) = \aleph_n^{(1)}(x) + \Re_n(x)}$$

Công thức này gọi là công thức Newton tiến xuất phát từ điểm nút $x_o$

Tương tự ta có công thức Newton lùi

$$\boxed{f(x) = \aleph_n^{(2)}(x) + \Re_n(x)}$$

$$\aleph_n^{(2)}(x) = y_n + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1)$$

$\aleph_n^{(1)}(x)$ : *đa thức nội suy Newton tiến*

$\aleph_n^{(2)}(x)$ : *đa thức nội suy Newton lùi*

$\Re_n(x)$ : *xác định sai số*

Nếu hàm f có đạo hàm liên tục đến cấp n+1, ta có công thức đánh giá sai số :

$$\boxed{|\Re_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)| \text{ với } M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|}$$

**Ví dụ :** Cho hàm f xác định trên [0,1] và bảng số

| x | 0 | 0.3 | 0.7 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 2.2599 | 2.5238 | 2.7183 |

Tính gần đúng f(0.12) bằng Newton tiến và f(0.9) bằng Newton lùi

**Giải :** ta lập bảng các tỉ sai phân

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $f[x_k,x_{k+1}]$ | $f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$ | $f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | | | |
| | | 0.8663 | | Newton tiến |
| 0.3 | 2.2599 | | -0.2950 | |
| | | 0.6598 | | 0.2786 |
| 0.7 | 2.5238 | | -0.0164 | |
| | | 0.6483 | | Newton lùi |
| 1 | 2.7183 | | | |

Ta có

$$f(0.12) \approx \aleph_n^{(1)}(0.12)$$

$$= 2 + 0.8663(0.12) - 0.2950(0.12)(-0.18) + 0.2786(0.12)(-0.18)(-0.58)$$

$$= 2.1138$$

$$f(0.9) \approx \aleph_n^{(2)}(0.9)$$

$$= 2.7183 + 0.6483(-0.1) - 0.0164(-0.1)(0.2) + 0.2786(-0.1)(0.2)(0.6)$$

$$= 2.6505$$

## 3. TH các điểm nút cách đều :

Sai phân hữu hạn cấp 1 của hàm tại điểm $x_k$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

Bằng qui nạp, Sai phân hữu hạn cấp p của hàm tại điểm $x_k$

$$\Delta^p y_k = \Delta(\Delta^{p-1} y_k) = \Delta^{p-1} y_{k+1} - \Delta^{p-1} y_k$$

Ta có công thức

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p}] = \frac{\Delta^p y_k}{p!h^p}$$

# Công thức Newton tiến

$$\text{Đặt } q = \frac{(x - x_0)}{h}$$

$$\aleph_n^{(1)}(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

$$= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1) \ldots (q - n + 1)$$

# Công thức Newton lùi

$$\text{Đặt } p = \frac{(x - x_n)}{h}$$

$$\aleph_n^{(2)}(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} p + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} p(p+1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} p(p+1) \ldots (p + n - 1)$$

**Ví dụ :** Cho hàm f xác định và bảng số

| x | 30 | 35 | 40 | 45 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0.5 | 0.5736 | 0.6428 | 0.7071 |

Tính gần đúng f(32) và f(44)

**Giải :** ta lập bảng các sai phân hữu hạn

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $\Delta y_k$ | $\Delta^2 y_k$ | $\Delta^3 y_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 0.5 | | | |
| | | 0.0736 | | Newton tiến |
| 35 | 0.5736 | | -0.0044 | |
| | | 0.0692 | | -0.0005 |
| 40 | 0.6428 | | -0.0049 | |
| | | 0.0643 | | Newton lùi |
| 45 | 0.7071 | | | |

- Tính gần đúng f(32) : dùng công thức Newton tiến

$$n = 3,\ x_o = 30,\ q=(32-30)/5 = 0.4$$

$$f(32) \approx \aleph_n^{(1)}(32)$$

$$= 0.5 + \frac{0.0736}{1!}(0.4) - \frac{0.0044}{2!}(0.4)(-0.6) - \frac{0.0005}{3!}(0.4)(-0.6)(-1.6)$$

$$= 0.529936$$

- Tính gần đúng f(44) : dùng công thức Newton lùi

$$n = 3,\ x_n = 45,\ p=(44-45)/5 = -0.2$$

$$f(44) \approx \aleph_n^{(2)}(44)$$

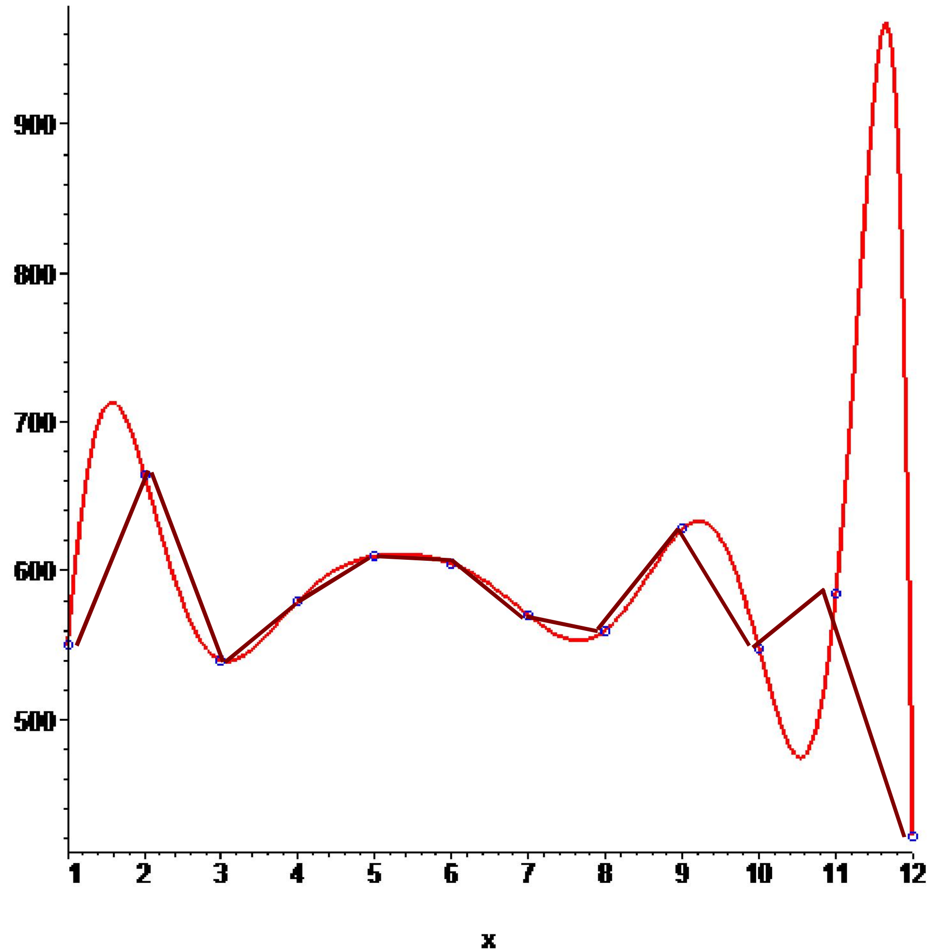
$$= 0.7071 + \frac{0.0643}{1!}(-0.2) - \frac{0.0049}{2!}(-0.2)(0.8) - \frac{0.0005}{3!}(-0.2)(0.8)(1.8)$$

$$= 0.694656$$

# IV. SPLINE bậc 3 :

Với n lớn, đa thức nội suy bậc rất lớn, khó xây dựng và khó ứng dụng.

Một cách khắc phục là thay đa thức nội suy bậc n bằng các đa thức bậc thấp ($\leq 3$) trên từng đoạn $[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$



# 1. Định nghĩa :

Cho hàm y=f(x) xác định trên đoạn [a,b] và bảng số

| x | $a=x_o$ | $x_1$ | $x_2$ | . . . | $x_n=b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $y_o$ | $y_1$ | $y_2$ | . . . | $y_n$ |

Một Spline bậc 3 nội suy hàm f(x) là hàm g(x) thỏa các điều kiện sau :

(i) g(x) có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên [a,b]

(ii) $g(x)=g_k(x)$ là 1 đa thức bậc 3 trên $[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,1,..,n-1$

(iii) $g(x_k) = y_k$, $k=0,1, ..., n$

## 2. Cách xây dựng Spline bậc 3 :

Đặt $h_k = x_{k+1} - x_k$

$g_k(x)$ là đa thức bậc 3 nên có dạng :

$$g_k(x) = a_k+b_k(x-x_k)+c_k(x-x_k)^2+d_k(x-x_k)^3$$

- Ta có $g(x_k) = y_k$

$\Rightarrow \quad a_k = y_k,\ k = 0,1,\ldots,n$

- g(x) khá vi liên tục đến cấp 2 nên

$$(A)\ g_k(x_{k+1}) = g_{k+1}(x_{k+1})$$

$$(B)\ g_k'(x_{k+1}) = g_{k+1}'(x_{k+1}),\ \forall k = 0,1,..,n-1$$

$$(C)\ g_k''(x_{k+1}) = g_{k+1}''(x_{k+1})$$

- Điều kiện (A) suy ra

$$a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = y_{k+1}$$

$$\Rightarrow \qquad b_k = \frac{(y_{k+1} - y_k)}{h_k} - c_k h_k - d_k h_k^2 \qquad (1)$$

Ta có $\qquad g_k'(x) = b_k + 2c_k(x-x_k) + 3d_k(x-x_k)^2$

$\qquad g_k''(x) = 2c_k + 6d_k(x-x_k)$

- Điều kiện (C) suy ra

$$2c_k + 6d_k h_k = 2c_{k+1}$$

$$\Rightarrow \qquad d_k = \frac{(c_{k+1} - c_k)}{3h_k} \qquad (2)$$

- Thay (2) vào (1) ta đước

$$b_k = \frac{(y_{k+1} - y_k)}{h_k} - \frac{(c_{k+1} + 2c_k)h_k}{3} \qquad (3)$$

- Điều kiện (B) suy ra

$$b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = b_{k+1}$$

$$hay \qquad b_{k-1} + 2c_{k-1}h_{k-1} + 3d_{k-1}h_{k-1}^2 = b_k \qquad (4)$$

- Thay (2) và (3) vào (4) ta được

$$h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)c_k + h_k c_{k+1} = \frac{3(y_{k+1} - y_k)}{h_k} - \frac{3(y_k - y_{k-1})}{h_{k-1}} \quad (5)$$

$$\forall k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Phương trình (5) là hệ pttt gồm n-1 pt, dùng để xác định các hệ số $c_k$. Từ $c_k$ và (2) (3) ta xác định được tất cả các hệ số của đa thức $g_k(x)$

Phương trình (5) có vô số nghiệm, để có nghiệm duy nhất ta cần bổ sung thêm 1 số điều kiện

❖ **Định nghĩa :**

- Spline tự nhiên là spline với điều kiện

$$g''(a) = g''(b) = 0$$

- Spline ràng buộc là spline với điều kiện

$$g'(a) = \alpha, \quad g'(b) = \beta$$

# 3. Spline tự nhiên :

Giải thuật xác định spline tự nhiên :

Điều kiện g”(a)=g”(b) = 0 suy ra $c_o = c_n = 0$

B1. Tính $h_k = x_{k+1} - x_k$, k = 0, n-1.

$a_k = y_k$, k = 0, n

B2. Giải hệ Ac = b tìm $c = (c_o, c_1, ..., c_n)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3(y_2 - y_1)}{h_1} - \dfrac{3(y_1 - y_0)}{h_0} \\ \dots \\ \dfrac{3(y_n - y_{n-1})}{h_{n-1}} - \dfrac{3(y_{n-1} - y_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

B3. Tính các hệ số $b_k$, $d_k$.

$$b_k = \frac{(y_{k+1} - y_k)}{h_k} - \frac{(c_{k+1} + 2c_k)h_k}{3}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$d_k = \frac{(c_{k+1} - c_k)}{3h_k}$$

**Ví dụ :** Xây dựng spline tự nhiên nội suy hàm theo bảng số

| x | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| y | 1 | 1 | 4 |

Giải

n = 2

B1. $h_o = 2$, $h_1 = 3$. $a_o = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$

B2. Giải hệ $Ac = b$ với $c = (c_0, c_1, c_2)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3(y_2 - y_1)}{h_1} - \dfrac{3(y_1 - y_0)}{h_0} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow c_o = c_2 = 0,\ c_1 = 3/10$$

B3. Tính các hệ số $b_k$, $d_k$.

$$b_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{h_0} - \frac{(c_1 + 2c_0)h_0}{3} = -\frac{1}{5}$$

$$b_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{(c_2 + 2c_1)h_1}{3} = \frac{2}{5}$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = \frac{1}{20}, \quad d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = -\frac{1}{30}$$

Kết luận : spline tự nhiên

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) = 1 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{20}x^3 & 0 \le x \le 2 \\ g_1(x) = 1 + \frac{2}{5}(x-2) + \frac{3}{10}(x-2)^2 - \frac{1}{30}(x-2)^3 & 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

**Ví dụ :** Xây dựng spline tự nhiên nội suy hàm theo bảng số

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| y | 1 | 2 | 4 | 8 |

$n = 3$

B1. $h_o = h_1 = h_2 = 1$. $a_o = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$

B2. Giải hệ $Ac = b$ với $c = (c_0, c_1, c_2, c_3)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3(y_2-y_1)}{h_1}-\dfrac{3(y_1-y_0)}{h_0} \\ \dfrac{3(y_3-y_2)}{h_2}-\dfrac{3(y_2-y_1)}{h_1} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_0=c_3=0 \\ 4c_1+c_2=3 \\ c_1+4c_2=6 \end{cases}$$

Giải ta được $c_o = c_3 = 0$, $c_1 = 2/5$, $c_2 = 7/5$

# B3. Tính các hệ số $b_k$, $d_k$.

$$b_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{h_0} - \frac{(c_1 + 2c_0)h_0}{3} = \frac{13}{15}, \quad b_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{(c_2 + 2c_1)h_1}{3} = \frac{19}{15}$$

$$b_2 = \frac{(y_3 - y_2)}{h_2} - \frac{(c_3 + 2c_2)h_2}{3} = \frac{46}{15}$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = \frac{2}{15}, \quad d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = \frac{1}{3}, \quad d_2 = \frac{(c_3 - c_2)}{3h_2} = -\frac{7}{15}$$

## Kết luận : spline tự nhiên

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) = 1 + \frac{13}{15}x + \frac{2}{15}x^3 & 0 \le x \le 1 \\ g_1(x) = 2 + \frac{19}{15}(x-1) + \frac{2}{5}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \\ g_2(x) = 4 + \frac{46}{15}(x-2) + \frac{7}{5}(x-2)^2 - \frac{7}{15}(x-2)^3 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

## 4. Spline ràng buộc :

Điều kiện g'(a) = α, g'(b) = β xác định 2 pt :

$$\begin{cases} 2h_0c_0 + h_0c_1 = 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3\beta - 3\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{cases}$$

Giải thuật xác định spline ràng buộc :

B1. Tính $h_k = x_{k+1} - x_k$, k = 0, n-1.

$a_k = y_k$, k = 0, n

## B2. Giải hệ Ac = b tìm c = $(c_o, c_1, ..., c_n)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3\dfrac{y_1-y_0}{h_0} - 3\alpha \\ \dfrac{3(y_2-y_1)}{h_1} - \dfrac{3(y_1-y_0)}{h_0} \\ \dots \\ \dfrac{3(y_n-y_{n-1})}{h_{n-1}} - \dfrac{3(y_{n-1}-y_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 3\beta - 3\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

## B3. Tính các hệ số $b_k$, $d_k$.

$$b_k = \frac{(y_{k+1}-y_k)}{h_k} - \frac{(c_{k+1}+2c_k)h_k}{3}, \; k = 0,1,\dots,n-1$$

$$d_k = \frac{(c_{k+1}-c_k)}{3h_k}$$

**Ví dụ :** Xây dựng spline ràng buộc nội suy hàm theo bảng số

| x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| y | 1 | 2 | 1 |

với điều kiện $g'(0)=g'(2) = 0$

Giải

$n = 2$

B1. $h_o = h_1 = 1$. $a_o = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$

B2. Giải hệ Ac = b với c = $(c_0, c_1, c_2)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ \dfrac{3(y_2 - y_1)}{h_1} - \dfrac{3(y_1 - y_0)}{h_0} \\ 3\beta - 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow c_0 = 3, c_1 = -3, c_2 = 3$$

B3. Tính các hệ số $b_k$, $d_k$.

$$b_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{h_0} - \frac{(c_1 + 2c_0)h_0}{3} = 0$$

$$b_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{(c_2 + 2c_1)h_1}{3} = 0$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = -2, \quad d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = 2$$

Kết luận : spline ràng buộc

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) = 1 + 3x^2 - 2x^3 & 0 \le x \le 1 \\ g_1(x) = 2 - 3(x-1)^2 + 2(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

# V. BÀI TOÁN XẤP XỈ THỰC NGHIỆM

Xét bài toán thống kê lượng mưa trong 12 tháng
Thực nghiệm (k=1..12)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $y_k$ | 550 | 650 | 540 | 580 | 610 | 605 | ...... | |

Các giá trị $y_k$ được xác định bằng thực nghiệm nên có thể không chính xác. Khi đó việc xây dựng một đường cong đi qua tất cả các điểm $M_k(x_k, y_k)$ cũng không còn chính xác

Bài toán xấp xỉ thực nghiệm : là tìm hàm f(x) xấp xỉ bảng $\{(x_k,y_k)\}$ theo phương pháp bình phương cực tiểu :

$$g(f) = \sum (f(x_k) - y_k)^2 \ \textit{đạt} \ \min$$

Hàm f tổng quát rất đa dạng. Để đơn giản, trong thực tế thường ta tìm hàm f theo một trong các dạng sau :

- $f(x) = A + Bx$
- $f(x) = A+Bx+Cx^2$
- $f(x) = A\sin x+B\cos x$
- $f(x) = Ae^{Bx}$
- $f(x) = Ax^B$
- $f(x) = A\ln Bx$ ...

# 1. Trường hợp f(x) = A+ Bx

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B) = \sum (A + Bx_k - y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 2 biến g(A,B)

Điểm dừng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial A} = 2\sum (A + Bx_k - y_k) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial B} = 2\sum (A + Bx_k - y_k)x_k = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} nA + (\sum x_k)B = \sum y_k \\ (\sum x_k)A + (\sum x_k^2)B = \sum x_k y_k \end{cases}$$

**Ví dụ :** Tìm hàm f(x) = A + Bx xấp xỉ bảng số

| x | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |

Theo pp BPCT

Ta có n = 10

Giải hệ pt

$$\begin{cases} nA + (\sum x_k)B = \sum y_k \\ (\sum x_k)A + (\sum x_k^2)B = \sum x_k y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10A + \ 29B = 39 \\ 29A + 109B = 140 \end{cases}$$

Nghiệm A = 0.7671, B=1.0803

Vậy f(x) = 0.7671+1.0803x

## 2. Trường hợp f(x) = Acosx + Bsinx

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B)=\sum(A\cos x_k+B\sin x_k-y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 2 biến g(A,B)

Điểm dừng
$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial A}=2\sum(A\cos x_k+B\sin x_k-y_k)\cos x_k=0\\ \dfrac{\partial g}{\partial B}=2\sum(A\cos x_k+B\sin x_k-y_k)\sin x_k=0\end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases}(\sum\cos^2 x_k)A+(\sum\sin x_k\cos x_k)B=\sum y_k\cos x_k\\ (\sum\sin x_k\cos x_k)A+(\sum\sin^2 x_k)B=\sum y_k\sin x_k\end{cases}$$

**Ví dụ :** Tìm hàm f(x)=Acosx+Bsinx xấp xỉ bảng số

| x | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | rad |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1.45 | 1.12 | 0.83 | 1.26 | 1.14 | |

Theo pp BPCT

Ta có n = 5

Giải hệ pt

$$\begin{cases} (\sum \cos^2 x_k)A + (\sum \sin x_k \cos x_k)B = \sum y_k \cos x_k \\ (\sum \sin x_k \cos x_k)A + (\sum \sin^2 x_k)B = \sum y_k \sin x_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.2703A - 0.0735B = -0.3719 \\ -0.0735A + 2.7297B = 0.0533 \end{cases}$$

Nghiệm A = -0.1633, B=0.0151

Vậy f(x) = -0.1633cosx+0.0151sinx

## 3. Trường hợp f(x) = Ax$^2$ + Bsinx

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B) = \sum (Ax_k^2 + B\sin x_k - y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 2 biến g(A,B)

Điểm dừng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial A} = 2\sum (Ax_k^2 + B\sin x_k - y_k)x_k^2 = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial B} = 2\sum (Ax_k^2 + B\sin x_k - y_k)\sin x_k = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} (\sum x_k^4)A + (\sum x_k^2 \sin x_k)B = \sum x_k^2 y_k \\ (\sum x_k^2 \sin x_k)A + (\sum \sin^2 x_k)B = \sum y_k \sin x_k \end{cases}$$

**Ví dụ :** Tìm hàm f(x)=Ax²+Bsinx xấp xỉ bảng số

| x | 1.3 | 1.5 | 1.8 | 2.0 | 2.4 | 2.6 | 2.7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2.7 | 1.8 | 3.51 | 3.1 | 3.78 | 3.9 | 4.32 |

Theo pp BPCT

Ta có n =7

Giải hệ pt

$$\begin{cases}(\sum x_k^4)A + (\sum x_k^2 \sin x_k)B = \sum x_k^2 y_k \\ (\sum x_k^2 \sin x_k)A + (\sum \sin^2 x_k)B = \sum y_k \sin x_k\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}166.4355A + 21.1563B = 112.015 \\ 21.1563A + \quad 4.6033B = 17.0441\end{cases}$$

Nghiệm A = 0.4867, B=1.4657

Vậy f(x) = 0.4857x² + 1.4657sinx

# 4. Trường hợp f(x) = A+ Bx+Cx²

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B,C) = \sum (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 3 biến g(A,B,C)

Điểm dừng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial A} = 2\sum (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial B} = 2\sum (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)x_k = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial C} = 2\sum (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)x_k^2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} nA + (\sum x_k)B + (\sum x_k^2)C = \sum y_k \\ (\sum x_k)A + (\sum x_k^2)B + (\sum x_k^3)C = \sum x_k y_k \\ (\sum x_k^2)A + (\sum x_k^3)B + (\sum x_k^4)C = \sum x_k^2 y_k \end{cases}$$

**Ví dụ :** Tìm hàm $f(x) = A + Bx+Cx^2$ xấp xỉ bảng số

| x | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 4.12 | 4.18 | 6.23 | 8.34 | 8.38 | 12.13 | 18.32 |

Theo pp BPCT

Ta có n = 7

Giải hệ pt

$$\begin{cases} nA + (\sum x_k)B + (\sum x_k^2)C = \sum y_k \\ (\sum x_k)A + (\sum x_k^2)B + (\sum x_k^3)C = \sum x_k y_k \\ (\sum x_k^2)A + (\sum x_k^3)B + (\sum x_k^4)C = \sum x_k^2 y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7A + 19B + 65C = 61.70 \\ 19A + 65B + 253C = 211.04 \\ 65A + 253B + 1061C = 835.78 \end{cases}$$

Nghiệm A = 4.3, B=-0.71, C=0.69

Vậy $f(x) = 4.3-0.71x+0.69x^2$