

**Chương 6**  
**GIẢI GẦN ĐÚNG**  
**PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN**

# I. GIẢI GẦN ĐÚNG PTVP CẤP 1 :

**Xét bài toán Cauchy** : tìm nghiệm  $y=y(x)$  của phương trình vi phân với giá trị ban đầu  $y_0$

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad \forall x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Các phương pháp giải gần đúng :

- Công thức Euler
- Công thức Euler cải tiến
- Công thức Runge-Kutta

# 1. Công thức Euler :

Để tìm nghiệm gần đúng của bài toán Cauchy ta chia đoạn  $[a,b]$  thành  $n$  đoạn nhỏ bằng nhau với bước  $h = (b-a)/n$

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, \dots, x_k = x_0 + kh, \dots, x_n = b$$

Nghiệm gần đúng của bài toán là dãy  $\{y_k\}$  gồm các giá trị gần đúng của hàm tại  $x_k$

$$\text{Ta có } y_k \approx y(x_k), k = 0, n$$

Giả sử bài toán có nghiệm duy nhất  $y(x)$  có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên  $[a,b]$ .

Khai triển Taylor ta có

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + (x_{k+1} - x_k) y'(x_k) + (x_{k+1} - x_k)^2 y''(\xi_k)/2$$

với  $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$

**Công thức Euler :**

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k), \quad k = 0, n-1$$

$$\text{với } h = x_{k+1} - x_k$$

**Ví dụ :** Dùng công thức Euler tìm nghiệm gần đúng của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

với  $n = 5$

Tính sai số biết nghiệm chính xác là :

$$y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$$

**giải**

ta có  $h = 0.2$

$$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1$$

## Công thức Euler

$$\begin{cases} y_0 = 0.5 \\ y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) = y_k + 0.2 (y_k - x_k^2 + 1) \end{cases}$$

k	$x_k$	$y_k$	$y(x_k)$	$ y(x_k) - y_k $
0	0	0.5	0.5	0
1	0.2			
2	0.4			
3	0.6			
4	0.8			
5	1			

$$A = 0$$

$$B = 0.5$$

$$B = B + 0.2(B - A^2 + 1) : A = A + 0.2 :$$

$$(A+1)^2 - 0.5e^A : \text{Ans} - B$$

\* **Nhận xét** : công thức Euler đơn giản, nhưng sai số còn lớn nên ít được sử dụng

## 2. Công thức Euler cải tiến :

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + (k_1+k_2)/2 & k = 0, 1, \dots, n-1 \\ k_1 = hf(x_k, y_k), \\ k_2 = hf(x_k+h, y_k + k_1) \end{cases}$$

với  $h = x_{k+1} - x_k$



**Ví dụ :** Dùng công thức Euler cải tiến tìm nghiệm gần đúng của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

với  $n = 5$

Tính sai số biết nghiệm chính xác là :

$$y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$$

**giải**

ta có  $h = 0.2$

$$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1$$

## Công thức Euler cải tiến

$$\begin{cases} y_0 = 0.5 \\ y_{k+1} = y_k + (k_1 + k_2) / 2 \\ k_1 = 0.2(y_k - x_k^2 + 1) \\ k_2 = 0.2(y_k + k_1 - (x_k + 0.2)^2 + 1) \end{cases}$$

k	$x_k$	$y_k$	$y(x_k)$	$ y(x_k) - y_k $
0	0	0.5	0.5	0
1	0.2			
2	0.4			
3	0.6			
4	0.8			
5	1			

$$A = 0 \quad (x_k)$$

$$B = 0.5 \quad (y_k)$$

$$C = 0.2(B - A^2 + 1) :$$

$$D = 0.2(B + C - (A+0.2)^2 + 1):$$

$$B = B + (C+D)/2:$$

$$A = A + 0.2:$$

$$(A+1)^2 - 0.5e^A : \text{Ans-B}$$

### 3. Công thức Runge Kutta bậc 4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = hf(x_k, y_k) \\ K_2 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 = hf(x_k + h, y_k + K_3) \end{array} \right.$$

**Ví dụ :** Xét bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2.7xy + \cos(x+2.7y), & 1.2 \leq x \\ y(1.2) = 5.4 \end{cases}$$

Dùng công thức Runge-Kutta tính gần đúng  $y(1.5)$  với bước  $h = 0.3$

**giải**

Công thức Runge-Kutta bậc 4

$$x_0 = 1.2, y_0 = 5.4$$

$$y_1 = y_0 + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) / 6$$

$$K_1 = 0.3(2.7x_0y_0 + \cos(x_0 + 2.7y_0))$$

$$K_2 = 0.3(2.7(x_0 + 0.3/2)(y_0 + K_1/2) + \cos(x_0 + 0.3/2 + 2.7(y_0 + K_1/2)))$$

$$K_3 = 0.3(2.7(x_0 + 0.3/2)(y_0 + K_2/2) + \cos(x_0 + 0.3/2 + 2.7(y_0 + K_2/2)))$$

$$K_4 = 0.3(2.7(x_0 + 0.3)(y_0 + K_3) + \cos(x_0 + 0.3 + 2.7(y_0 + K_3)))$$

Bấm máy ta được

$$K_1 = 4.949578057 \quad K_2 = 8.367054617$$

$$K_3 = 10.33000627 \quad K_4 = 19.41193853$$

$$y(1.5) = 15.69260639 \approx 15.6926$$

**Ví dụ :** Dùng công thức Runge-Kutta tìm nghiệm gần đúng của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

với  $n = 5$

Tính sai số biết nghiệm chính xác là :

$$y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$$

**giải**

ta có  $h = 0.2$

$$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1$$

$$A = 0 \quad (x_k)$$

$$B = 0.5 \quad (y_k)$$

$$C = 0.2(B - A^2 + 1) :$$

$$D = 0.2(B + C/2 - (A+0.1)^2 + 1):$$

$$E = 0.2(B + D/2 - (A+0.1)^2 + 1):$$

$$F = 0.2(B + E - (A+0.2)^2 + 1):$$

$$B = B + (C+2D+2E+F)/6:$$

$$A = A+0.2:$$

$$(A+1)^2 - 0.5e^A : \text{Ans-B}$$



## Công thức Runge-Kutta bậc 4

$$y_{k+1} = y_k + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) / 6$$

$$K_1 = 0.2(y_k - x_k^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= 0.2 [y_k + 0.1(y_k - x_k^2 + 1) - (x_k + 0.1)^2 + 1] \\ &= 0.2(1.1 y_k - 1.1 x_k^2 - 0.2 x_k + 1.09) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3 &= 0.2 [y_k + 0.1(1.1 y_k - 1.1 x_k^2 - 0.2 x_k + 1.09) \\ &\quad - (x_k + 0.1)^2 + 1] \\ &= 0.2(1.11 y_k - 1.11 x_k^2 - 0.22 x_k + 1.099) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_4 &= 0.2 [y_k + 0.2(1.11 y_k - 1.11 x_k^2 - 0.22 x_k + 1.099) \\ &\quad - (x_k + 0.2)^2 + 1] \\ &= 0.2(1.222 y_k - 1.222 x_k^2 - 0.444 x_k + 1.1798) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_0 = 0.5 \\ y_{k+1} = y_k + 0.2(6.642y_k - 6.642x_k^2 - 1.284x_k + 6.5578)/6 \end{cases}$$

k	$x_k$	$y_k$	$y(x_k)$	$ y(x_k) - y_k $
0	0	0.5	0.5	0
1	0.2			
2	0.4			
3	0.6			
4	0.8			
5	1			

## II. GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ PTVP :

Xét hệ phương trình vi phân cấp 1

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \dots \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

với  $a \leq x \leq b$  và thỏa điều kiện ban đầu

$$y_1(a) = \alpha_1, y_2(a) = \alpha_2, \dots, y_m(a) = \alpha_m$$

Nghiệm  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

Để tìm nghiệm gần đúng, ta chia đoạn  $[a, b]$  thành  $n$  đoạn nhỏ bằng nhau với bước  $h = (b-a)/n$  và các điểm chia

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, \dots, x_k = x_0 + kh, \dots, x_n = b$$

Nghiệm gần đúng là dãy  $\{ y_k = (y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{mk}) \}$  với  $y_{ik} \approx y_i(x_k)$

### **Công thức Euler :**

$$y_{i, k+1} = y_{i, k} + h f_i(x_k, y_{1k}, \dots, y_{mk})$$

$$\forall i=1..m; k = 0.. n-1$$

## Công thức Euler cải tiến :

$$y_{i,k+1} = y_{i,k} + (K_{1i} + K_{2i}) / 2$$

$$K_{1i} = h f_i(x_k, y_{1k}, \dots, y_{mk})$$

$$K_{2i} = h f_i(x_k+h, y_{1k}+K_{11}, \dots, y_{mk}+K_{1m})$$

$$\forall i=1,m; k = 0, n-1$$

## Công thức Runge-Kutta bậc 4 :

$$y_{i,k+1} = y_{i,k} + (K_{1i}+2K_{2i}+2K_{3i}+K_{4i}) / 6$$

$$K_{1i} = h f_i(x_k, y_{1k}, \dots, y_{mk})$$

$$K_{2i} = h f_i(x_k+h/2, y_{1k}+K_{11}/2, \dots, y_{mk}+K_{1m}/2)$$

$$K_{3i} = h f_i(x_k+h/2, y_{1k}+K_{21}/2, \dots, y_{mk}+K_{2m}/2)$$

$$K_{4i} = h f_i(x_k+h, y_{1k}+K_{31}, \dots, y_{mk}+K_{3m})$$

$$\forall i=1,m; k = 0, n-1$$

**Ví dụ :** Sử dụng công thức Euler giải gần đúng hệ pt vi phân

$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 + 2y_2 - (2x^2 + 1)e^{2x} \\ y'_2 = 4y_1 + y_2 + (x^2 + 2x - 4)e^{2x} \end{cases}$$

với  $0 \leq x \leq 0.5$

điều kiện ban đầu  $y_1(0) = y_2(0) = 1$

bước  $h = 0.1$

So sánh với nghiệm chính xác

$$y_1(x) = 1/3e^{5x} - 1/3e^{-x} + e^{2x}$$

$$y_2(x) = 1/3e^{5x} + 2/3e^{-x} + x^2e^{2x}$$

## Công thức Euler

$$\begin{cases} y_{10} = 1 \\ y_{1k+1} = y_{1k} + h (3y_{1k} + 2y_{2k} - (2x_k^2 + 1)e^{2x_k}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} y_{20} = 1 \\ y_{2k+1} = y_{2k} + h (4y_{1k} + y_{2k} + (x_k^2 + 2x_k - 4) e^{2x_k}) \end{cases}$$

$x_k$	$y_{1k}$	$y_1(x_k)$	$y_{2k}$	$y_2(x_k)$
0	1	1	1	1
0.1				
0.2				
0.3				
0.4				
0.5				

$$A=0 \text{ (x)}$$

$$B=1 \text{ (y}_{1k}\text{)}$$

$$C=1 \text{ (y}_{2k}\text{)}$$

$$D=B + 0.1 (3B + 2C - (2A^2 + 1)e^{2A}):$$

$$C=C + 0.1 (4B + C + (A^2 + 2A - 4) e^{2A}):$$

$$B=D:$$

$$A=A+0.1$$

$$A=0$$

$$e^{5A}/3 - e^{-A}/3 + e^{2A}:$$

$$e^{5A}/3 + 2/3 e^{-A}/3 + A^2 e^{2A}:$$

$$A=A+0.1$$



### III. GIẢI GẦN ĐÚNG PTVP CẤP CAO:

Xét phương trình vi phân bậc  $m$

$$y^{(m)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad a \leq x \leq b$$

với điều kiện ban đầu

$$y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \dots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$$

Đặt  $y_1 = y$ ,  $y_2 = y'$ ,  $y_3 = y''$ ,  $\dots$ ,  $y_m = y^{(m-1)}$

Ta chuyển phương trình vi phân bậc  $m$  về hệ  $m$  phương trình vi phân cấp 1

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \dots \\ y'_{m-1} = y_m \\ y'_m = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu

$$y_1(a) = \alpha_1, y_2(a) = \alpha_2, \dots, y_m(a) = \alpha_m,$$

**Ví dụ :** Sử dụng công thức Euler giải gần đúng pt vi phân cấp 2

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x e^{2x}, 0 \leq x \leq 0.5$$

điều kiện ban đầu

$$y(0) = -0.4, y'(0) = -0.6$$

với bước  $h = 0.1$

So sánh với nghiệm chính xác biết nghiệm CX

$$y_1(x) = 0.2e^{2x} (\sin x - 2\cos x)$$

$$y_2(x) = 0.2e^{2x}(4\sin x - 3\cos x) = y'$$

đặt  $y_1 = y$ ,  $y_2 = y'$  chuyển pt về hệ

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = \sin x e^{2x} - 2y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

điều kiện  $y_1(0) = -0.4$ ,  $y_2(0) = -0.6$

### Công thức Euler

$$\begin{cases} y_{10} = -0.4 \\ y_{1k+1} = y_{1k} + 0.1 y_{2k} \\ y_{20} = -0.6 \\ y_{2k+1} = y_{2k} + 0.1 (\sin x_k e^{2x_k} - 2y_{1k} + 2y_{2k}) \end{cases}$$

$x_k$	$y_{1k}$	$y_1(x_k)$	$y_{2k}$	$y_2(x_k)=y'(x_k)$
0	-0.4	-0.4	-0.6	-0.6
0.1				
0.2				
0.3				
0.4				
0.5				

$$A=0$$

$$B=-0.4$$

$$C=-0.6$$

$$D=B+0.1C$$

$$C=C+0.1(\sin Ae^{2A} - 2B + 2C)$$

$$B=D$$

$$A=A+0.1$$