CHƯƠNG I: ĐẠI SỐ TỔ HỢP

§1 HOÁN VỊ- CHỈNH HỢP-TỔ HỢP

I. Quy tắc nhân và quy tắc cộng

1.Quy tắc nhân:

Một công việc có thể chia thành k giai đoạn liên tiếp nhau để hoàn thành, giả sử
Giai đoạn 1 có m_1 cách thực hiện
Giai đoạn 2 có m_2 cách thực hiện
$\vdots$
Giai đoạn k có m_k cách thực hiện
Số cách để hoàn thành công việc là: $m_1.m_2\ldots m_k$

Ví dụ: Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$
Từ A có thể lập được bao nhiêu:

a) Số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau.
b) Số tự nhiên lẻ có 4 chữ số khác nhau
c) Số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau

GIẢI:

a) Gọi số cần tìm $\overline{abcd}$
$a\neq 0\Rightarrow$ a có 9 cách chọn
b có 9 cách chọn
c có 8 cách chọn
d có 7 cách chọn
Vậy có $9\times 9\times 8\times 7=4536$ số cần tìm

b) Gọi số lẻ cần tìm $\overline{abcd}$
d có 5 cách chọn
$a\neq 0\Rightarrow$ a có 8 cách chọn
b có 8 cách chọn
c có 7 cách chọn
Vậy có $5\times 8\times 8\times 7=2240$ số cần tìm

c) Các số chẵn: 4536-2240=2296

2.Quy tắc cộng:

Một công việc hoàn thành có k trường hợp khác nhau để thực hiện. Gỉa sử
Trường hợp 1 có m_1 cách hoàn thành.
Trường hợp 2 có m_2 cách hoàn thành.
$\vdots$
Trường hợp k có m_k cách hoàn thành.

Vậy có $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ cách hoàn thành công việc.

Ví dụ:

Có 3 hộp bi, hộp 1 có 6 viên, hộp 2 có 7 viên, hộp 3 có 8 viên. Nếu chọn ngẫu nhiên 1 hộp, từ hộp đó lấy ngẫu nhiên 1 bi. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 1bi theo kiểu như vậy.

GIẢI:

Có 3 trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: chọn được hộp 1 sẽ có 6 cách lấy ra 1 viên bi.

Trường hợp 2: chọn được hộp 2 sẽ có 7 cách lấy ra 1 viên bi.

Trường hợp 3 : chọn được hộp 3 sẽ có 8 cách lấy ra 1 viên bi.

Vậy ta có 6+7+8=21 cách lấy ra 1 viên bi theo kiểu trên.

II. Hoán vị-Chỉnh hợp-Tổ hợp

1. Hoán vị

Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử, mỗi bộ sắp thứ tự gồm n phần tử của A gọi là 1 hoán vị của n phần tử của A.

Số hoán vị: $P_n = n!$

Ví dụ 1: Một cách sắp xếp 5 người vào 1 cái bàn dài có 5 chỗ ngồi là 1 hoán vị. Số cách sắp xếp là $P_5 = 5! = 120$

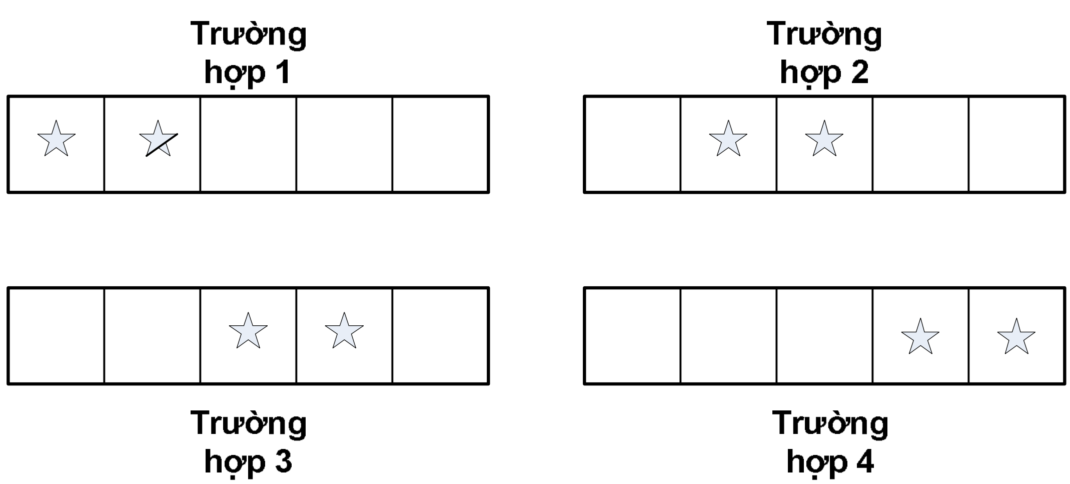
Ví dụ 2:

Người ta sắp xếp ngẫu nhiên 5 lá phiếu có ghi số thứ tự từ 1→5 cạnh nhau:

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp các lá phiếu chẵn ở cạnh nhau.
b) Có bao nhiêu cách sắp xếp các lá phiếu thành 2 nhóm chẵn, lẻ riêng biệt

GIẢI:

a) 2 lá phiếu chẵn (số 2&4) được đánh dấu *, 3 phiếu lẻ để trống ,ta có 4 trường hợp theo các hình dưới đây:



Với mỗi trường hợp ta có 2 giai đoạn liên tiếp nhau để sắp xếp:
Giai đoạn 1: có 2!=2 cách sắp 2 phiếu chẵn.
Giai đoạn 2: có 3!=6 cách sắp 2 phiếu lẻ.
Ta có $2!\times 3! = 12$ cách sắp xếp.
Vậy 4 trường hợp trên có 48 cách sắp xếp các lá phiếu theo yêu cầu.

b) Để các lá phiếu chẵn lẻ phân thành 2 nhóm riêng biệt ta chỉ có 2 trường hợp: trường hợp1 và trường hợp 4. Vậy ta có 24 cách sắp xếp theo yêu cầu.

2. Chỉnh hợp:
2.1 Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử, mỗi bộ sắp thứ tự gồm k phần tử của A (k<n) gọi là 1 chỉnh hợp chập k của n phần tử của A.
2.2 Số chỉnh hợp : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Ví dụ1:
1 lớp có 30 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách bầu 1 ban chấp hành gồm 3 người : 1 Lớp trưởng, 1 lớp phó học tập, 1 lớp phó đời sống.

GIẢI: Việc chọn 3 người ứng với 3 vị trí đòi hỏi năng lực khác nhau nên việc sắp này phải tuân theo thứ tự. Vậy số cách sắp xếp theo yêu cầu là $A_{30}^3 = 24360$

Ví dụ 2:
Cho tập $A = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$
Từ A có thể lập được bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số khác nhau và < 600000.

GIẢI:
Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcdef}$ thỏa các điều kiện $a \neq 0, a \in \{1;2;3;4;5\}, f \in \{1;3;5;7;9\}$
Ta có thể chia 2 trường hợp sau đây:
Trường hợp 1: $a \in \{2;4\} \Rightarrow f \in \{1;3;5;7;9\}$
Ta có: a có 2 cách chọn, f có 5 cách chọn, bộ $bcde$ có $A_8^4 = 1680$ cách chọn,
Suy ra trường hợp 1 có $2 \times 5 \times 1680 = 16800$.

Trường hợp 2: $a \in \{1;3;5\} \Rightarrow f \in \{1;3;5;7;9\} \,\&\, f \neq a$
Ta có: a có 3 cách chọn, f có 4 cách chọn, bộ $bcde$ có $A_8^4 = 1680$ cách chọn,
Suy ra trường hợp 2 có $3 \times 4 \times 1680 = 20160$.
Vậy có 16800+20160=36960 số theo yêu cầu.

3.Tổ hợp
3.1 Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử, mỗi bộ sắp không thứ tự gồm k phần tử của A (k<n) gọi là 1 tổ hợp chập k của n phần tử của A.

3.2 Số tổ hợp : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

3.3 Chú ý: $C_n^0 = C_n^n = 1, C_n^1 = n$

Ví dụ 1:

1 buổi liên hoan có 10 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 cặp để nhảy(mỗi cặp gồm 1nam và 1 nữ).

GIẢI:

Ta chia công việc làm 3 giai đoạn thực hiện:

GĐ1: Chọn 3 nam trong 10 nam, số cách chọn: $C_{10}^3 = 120$

GĐ2: Chọn 3 nữ trong 6 nữ, số cách chọn: $C_6^3 = 20$

GĐ3: Mỗi trường hợp đã chọn ta ghép đôi để được các cặp nhảy bằng cách cố định 3 nữ, lần lượt xếp 3 nam vào 3 nữ theo quy tắc hoán vị ta được 3! cách ghép đôi.

Kết quả ta có: $3! \times 120 \times 20 = 14400$ cách sắp xếp.

Ví dụ:

1 tổ gồm 8 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn:

a) 5 người để dự hội nghị.

b) 5 người để dự hội nghị trong đó có đúng 2 nữ.

c) 5 người để dự hội nghị trong đó có ít nhất 3 nữ.

GIẢI:

a) Số cách chọn: $C_{14}^5 = 2002$

b) Số cách chọn: $C_8^3 \times C_6^2 = 840$

c) Có 3 trường hợp xảy ra: (3 nữ, 2 nam), (4 nữ, 1 nam), (5 nữ, 0 nam)

Số cách chọn: $C_8^2 \times C_6^3 + C_8^1 \times C_6^4 + C_8^0 \times C_6^5 = 686$

BÀI TẬP:

1) 18 đội bóng chuyền tham gia thi đấu, có bao nhiêu cách phân phối 3 huy chương vàng, bạc, đồng. Biết rằng mỗi đội chỉ có thể nhận tối đa 1 huy chương.

2) Cho tập $A = \{1;2;3;4;5\}$ Từ A có thể lập được

a) Bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau.

b) Bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau và ≤ 345

3) Một hộp đựng 4 bi đỏ, 5 bi trắng, 6 bi vàng, chọn ra 4 bi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ cả 3 màu.

4) Một hộp đựng 9 bi đỏ, 5 bi trắng, 4 bi vàng
a) Có bao nhiêu cách chọn 6 bi trong đó có đúng 2 bi đỏ.
b) Có bao nhiêu cách chọn 6 bi trong đó số bi xanh=số bi đỏ.

5) $A = \{1;2;5;7;8\}$ Từ A có bao nhiêu cách lập ra 3 chữ số khác nhau sao cho
a) Số tạo thành là số chẵn.
b) Số tạo thành là 1 số không có chữ số 7.
c) Số tạo thành <278.

6) $A = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ Từ A có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các số đó có mặt chữ số 0 và 1.

7) Có 12 sinh viên được phân về thực tập ở 3 xí nghiệp I, II, III. Có bao nhiêu cách phân 12 sinh viên đó về thực tập tại 3 xí nghiệp trong các trường hợp sau:
a) Phân về XNI 5 sinh viên, XNII 4 sinh viên, còn lại phân về XNIII.
b) Có 1 XN nhận 5 sinh viên, 1 XN nhận 4 sinh viên, và 1 XN nhận 3 sinh viên
c) Phân về mỗi XN 4 sinh viên.

8) 1 lớp có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ, chọn 3 học sinh để tham gia lễ khai giảng. Hỏi có bao nhiêu cách:
a) Chọn 3 học sinh gồm 1nam, 2 nữ.
b) Chọn 3 học sinh trong đó có ít nhất 1 nam.

9) Tính số đường chéo của đa giác lồi n cạnh.

10) Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ 4 đường thẳng và 5 đường vuông góc với 4 đường đó.