CHƯƠNG IV: ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

§1 KHÁI NIỆM VỀ ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

I. Khái niệm:
Ví dụ: gọi X là số chấm xuất hiện khi tung 1 con súc sắc. Rõ ràng X có thể nhận các giá trị: 1;2;3;4;5;6. Nhưng X nhận giá trị nào còn tùy thuộc vào việc gieo con xúc sắc. Ta gọi là biến ngẫu nhiên.
Vậy: Biến ngẫu nhiên (BNN) là đại lượng nhận giá trị thực, tùy thuộc vào kết quả ngẫu nhiên của phép thử.

NHẬN XÉT: X=1 là 1 giá trị biến ngẫu nhiên và $P[X=1]=\frac{1}{6}$. Vấn đề đặt ra là khi X nhận 1 giá trị nào đó thì xác suất bằng bao nhiêu. Nghĩa là ta cần tìm luật phân phối xác suất.

II. Phân loại đại lượng ngẫu nhiên.
a) Đại lượng ngẫu nhiên rời rạc: nếu tập giá trị của nó đếm được.
b) Đại lượng ngẫu nhiên liên tục: nếu tập giá trị của nó lấp đầy 1 khoảng nào đó trên trục số.

ví dụ:
Một hộp có 7 phấn trắng, 3 phấn màu. Gọi X là số viên phấn trắng có trong 3 viên lấy ra. X có thể nhận các giá trị 0; 1; 2; 3.

III. Bảng phân phối xác suất (chỉ dùng cho BNN rời rạc)

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	P_1	P_2	$\cdots$	P_n

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$
$$P[X = x_i] = P_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$
$$P[X = x] = 0, \forall x \notin \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$$
$$P[x_1 \le X \le x_k] = P[X = x_1] + P[X = x_2] + \cdots + P[X = x_k]; x_1; x_2; \ldots; x_k \in \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$$

Ví dụ: BNN X là " số nút xuất hiện khi gieo 1con xúc sắc" ta có bảng phân phối XS

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$P(1 \le X \le 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$P(X<3) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \approx 33.3\%$$

Ví dụ:
Một cơ quan có 3 xe ô tô: 1 xe 4 chỗ ngồi, 1xe 50 chỗ và 1 xe tải. Xác suất trong 1 ngày làm việc các xe được sử dụng lần lượt là: 0.8; 0.4; 0.9. Hãy lập bảng phân phối xác suất cho số loại xe được sử dụng trong 1 ngày của cơ quan.

GIẢI:
Gọi X là số loại xe được sử dụng trong 1ngày của cơ quan, X có thể nhận các giá trị: 0; 1; 2; 3.
Gọi $A_1; A_2; A_3$ lần lượt là các biến cố " Xe 4 chỗ ngồi, xe 50 chỗ và xe tải" được sử dụng trong 1 ngày của cơ quan. $A_1; A_2; A_3$ là các biến cố độc lập. Ta có:
$P(A_1) = 0.8; P(A_2) = 0.4; P(A_3) = 0.9;$

Xác suất khi X nhận các giá trị:

$$P(X=0) = P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = 0.2 \times 0.6 \times 0.1 = 0.012$$
$$P(X=1) = P(A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3} + \overline{A_1}.A_2.\overline{A_3} + \overline{A_1}.\overline{A_2}.A_3) =$$
$$= 0.8 \times 0.6 \times 0.1 + 0.2 \times 0.4 \times 0.1 + 0.2 \times 0.6 \times 0.9 + = 0.164$$
$$P(X=2) = P(A_1.A_2\overline{A_3} + A_1.\overline{A_2}.A_3 + \overline{A_1}A_2A_3) =$$
$$= 0.8 \times 0.4 \times 0.1 + 0.8 \times 0.6 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4 \times 0.9 + = 0.536$$
$$P(X=3) = P(A_1.A_2A_3) = 0.8 \times 0.4 \times 0.9 = 0.288$$

Ta có bảng phân phối xác suất như sau

X	0	1	2	3
P	0.012	0.164	0.536	0.288

IV. Hàm phân phối xác suất

1. *Định nghĩa*: Hàm phân phối xác suất của BNN X , ký hiệu là F(x) được xác định như sau:

$F(x) = P(X < x); \forall x \in R$

a) Nếu X là BNN rời rạc ta có bảng phân phối xác suất:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	P_1	P_2	$\cdots$	P_n

Lúc này hàm phân phối xác suất của X là:

$F(x) = \sum P_i$ còn gọi là hàm phân phối tích lũy.

$$F(x) = P(X < x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_k) \qquad (x_k < x)$$

<u>Tính chất:</u>

$$1)\, 0 \le F(x) \le 1$$

$$2)\, Khi \quad x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$$

Ví dụ:

Cho BNN X có bảng PPXS như sau:

X	0	1	2	3
P	0.012	0.164	0.536	0.288

Khi đó hàm phân phối tích lũy của X là: $F(x) = P(X < x)$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
&Khi \quad x \le 0 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = 0(\quad X = x_i < 0) \\
&Khi \quad 0 < x \le 1 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0.012 \\
&Khi \quad 1 < x \le 2 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.012 + 0.164 = 0.176 \\
&Khi \quad 2 < x \le 3 \Rightarrow F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.176 + 0.536 = 0.712 \\
&Khi \quad 3 < x \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1
\end{aligned}$$

Vậy hàm PPXS của X là:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 0.012 & 0 < x \le 1 \\ 0.176 & 1 < x \le 2 \\ 0.712 & 2 < x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

Ví dụ:
Cho BNN X có bảng PPXS như sau:

X	0	1	2	3
P	0.2	0.3	0.4	0.1

Khi đó hàm phân phối tích lũy của X là: $F(x) = P(X < x)$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
&Khi \quad x \le 0 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = 0(\quad X = x_i < 0) \\
&Khi \quad 0 < x \le 1 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0.2 \\
&Khi \quad 1 < x \le 2 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.2 + 0.3 = 0.5 \\
&Khi \quad 2 < x \le 3 \Rightarrow F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.5 + 0.4 = 0.9 \\
&Khi \quad 3 < x \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1
\end{aligned}$$

Vậy hàm PPXS của X là:

$$F(x)=P(X<x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 0.2 & 0<x\le 1\\ 0.5 & 1<x\le 2\\ 0.9 & 2<x\le 3\\ 1 & x>3\end{cases}$$

V. Đại lượng ngẫu nhiên liên tục

1. Hàm mật độ xác suất: Để thể hiện PPXS của BNN liên tục người ta dùng hàm mật độ xác suất.

Định nghĩa: Hàm f(x) có tập xác định R gọi là hàm mật độ xác suất của BNN liên tục X nếu f(x) thỏa 2 điều kiện sau:

$$\begin{cases} f(x)\ge 0 & \forall x\in R\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \end{cases}$$

Tính chất:

$$1) P(X=x)=0, \forall x\in R$$

$$2) P(a\le X\le b)=P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)dx, \forall a,b\in R$$

Ví dụ:

$$Cho \quad f(x)=\begin{cases}0 & x\notin[-2;2]\\ \frac{1}{4} & x\in[-2;2]\end{cases}$$

$$We \quad have: f(x)\ge 0, \forall x\in R \quad and$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-2} f(x)dx+\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx+\int\limits_{2}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-2}^{2}\frac{1}{4}dx=1$$

$$P(X<1)=\int\limits_{-\infty}^{1} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-2}0dx+\int\limits_{-2}^{1}\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}$$

2. Hàm phân phối xác suất:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad \forall x \in R$$

Tính chất

$$a) 0 \le F(x) \le 1; \qquad F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$$
$$b) F'(x) = f(x)$$
$$c) P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$$

Ví dụ: Cho BNN liên tục X có hàm mật độ XS:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\sqrt{4 - x^2}} & x \in (-2;2) \\ 0 & x \notin (-2;2) \end{cases}$$

$$a) \ Ti`m \quad \lambda$$
$$b) \ Ti`m \quad P(X < 1)$$

GIẢI:

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{2} \frac{\lambda}{\sqrt{4 - x^2}} dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \lambda \arcsin(1) - \lambda \arcsin(-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda \Pi = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\Pi}$$

$$b) P(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \frac{1}{\Pi} \int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx = \frac{1}{\Pi} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\Pi}\left[\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(-1)\right] = \frac{1}{\Pi}\left(\frac{\Pi}{6} + \frac{\Pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

Ví dụ:

$$Cho \quad f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}-x & x\in\left[0;\sqrt{2}\right]\\ 0 & x\notin\left[0;\sqrt{2}\right]\end{cases}$$

a) Chứng tỏ f(x) là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X nào đó.
b) Tính $P(0\le X<1)$
c) Lập hàm phân phối xác suất của X

GỈAI

$$a)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-x\right)dx+\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} 0dx=\sqrt{2}x-\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=1$$

$$b)P(0\le X<1)=\int_0^1 f(x)dx=\sqrt{2}x-\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

$$c)Khi \quad x\le 0\Rightarrow F(x)=P(X<x\le 0)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$$

$$Khi \quad 0<x\le\sqrt{2}\Rightarrow F(x)=P\left(X<x\le\sqrt{2}\right)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^x\left(\sqrt{2}-t\right)dt=\sqrt{2}x-\frac{x^2}{2}$$

$$Khi \quad x>\sqrt{2}\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

§2 CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

I. Kỳ vọng toán (Expectation)

1. *Định nghĩa*: Kỳ vọng toán của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu là E(x) được xác định như sau:

$$E(X)=\begin{cases}\sum x_i p_i & \text{If } X: \text{ Discrete(rời rạc)}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx & \text{If } X: \text{ Continuous(liên tục)}\end{cases}$$

Ví dụ:

Một hộp có: 3 bi nặng 10g; 5 bi nặng 50g; 2 bi nặng 20g. Chọn ngẫu nhiên 1 bi và gọi X là trọng lượng của bi đó. Tính E(X)

GIẢI:

a) Bảng phân phối xác suất:

X	10	20	50
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$

$$E(X)=10\times\frac{3}{10}+20\times\frac{2}{10}+50\times\frac{5}{10}=32$$

<u>NHẬN XÉT</u> : Trọng lượng ngẫu nhiên của 1 viên bi chính là trọng lượng trung bình của hộp bị đó.

Ý NGHĨA: E(X) là giá trị trung bình(về mặt xác suất) của biến số ngẫu nhiên X khi thực hiện phép thử tương ứng

<u>Tính chất:</u>

$$a)E(C)=C \qquad C=const$$
$$b)E(kX)=kE(X)$$
$$c)E(kX+lY)=kE(X)+lE(Y)$$
$$d)E(XY)=E(X).E(Y)$$

Nếu X,Y độc lập

II. Phương sai:

Ví dụ:

Năng suất lao động của mỗi người (Kg) trong tổ 1 và tổ 2 như sau:

Tổ 1: 200; 250; 300; 350; 400.

Tổ 2: 280; 290; 300; 310; 320.

Ta thấy năng suất lao động trung bình của mỗi tổ đều là 300 Kg. Tuy nhiên NSLĐ của tổ 1 chênh lệch nhiều hơn so với tổ 2. Nên số trung bình của tổ 1 kém đại diện hơn của tổ 2.

Do đó để đánh giá mức độ phân tán của các biến ngẫu nhiên người ta dùng khái niệm phương sai

1. *Định nghĩa:*(Deviation) Phương sai của biến số ngẫu nhiên ký hiệu là D(X) được xác định như sau:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\text{With} \quad E(X^2) = \begin{cases} \sum x_i^2 p_i & \text{If } X: \text{ Discrete} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx & \text{If } X: \text{ Continuous} \end{cases}$$

2. Ví dụ:

Một hộp có: 3 bi nặng 10g; 5 bi nặng 50g; 2 bi nặng 20g. Chọn ngẫu nhiên 1 bi và gọi X là trọng lượng của bi đó. Tính E(X); D(X)

GIẢI:

a) Bảng phân phối xác suất:

X	10	20	50
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$

$$E(X) = 10 \times \frac{3}{10} + 20 \times \frac{2}{10} + 50 \times \frac{5}{10} = 32$$

$$E(X^2) = 10^2 \times \frac{3}{10} + 20^2 \times \frac{2}{10} + 50^2 \times \frac{5}{10} = 1360$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1360 - 32^2 = 336$$

Ví dụ: Ta có thể tính trung bình của bình phương của độ lệch năng suất so với giá trị trung bình của tổ 1 và 2 như sau:

$$S_1^2 = \frac{1}{5}\left[(200-300)^2 + (250-300)^2 + (300-300)^2 + (350-300)^2 + (400-300)^2\right] = 5000$$

$$S_2^2 = \frac{1}{5}\left[(280-300)^2 + (290-300)^2 + (300-300)^2 + (310-300)^2 + (320-300)^2\right] = 200$$

$S_2^2 < S_1^2 \Rightarrow$

Năng suất lao động của tổ 2 đều hơn tổ 1

3. Ý NGHĨA:

D(X) là thông số dùng để đo độ phân tán các giá trị mà X có thể nhận xung quanh giá trị trung bình.

4. Tính chất:

$$a) D(X) \geq 0$$
$$b) D(C) = 0 \qquad C = const$$
$$c) D(kX) = k^2 D(X)$$
$$d) D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

Khi X, Y độc lập.

Ví dụ: Số lỗi sai được tìm thấy trong 1 cuốn sách dày 500 trang

Số lỗi	Số trang
0	102
1	138
2	140
3	79
4	33
5	8
Tổng	500

a) Tính số lỗi trung bình và phương sai của mỗi trang

GIẢI

Bảng tính phương sai về số lỗi sai

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	$(x_i - \mu)^2 f_i$
0	102	0	0	279.043
1	138	138	138	59.025
2	140	280	560	16.760
3	79	237	711	143.126
4	33	132	528	181.623
5	8	40	200	89.566
Tổng	500	827	2137	769.143

Số lỗi trung bình của mỗi trang: $\mu = \dfrac{827}{500} = 1.654$ lỗi/ trang.

Phương sai: $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \dfrac{769.143}{500} = 1.5383$

Có thể tính: $\sigma^2 = \overline{x^2} - \mu^2 = 1.5383$

II. Mốt(Mo: Mode)
Mode là giá trị của biến ngẫu nhiên X (Rời rạc) ứng với xác suất lớn nhất.
Mode còn gọi là giá trị tin chắc nhất (hay có khả năng nhất của X)

III.Median (MED)
Là giá trị của biến ngẫu nhiên X chia hàm phân phối thành 2 phần có xác suất bằng nhau và bằng 1/2 . MED(X) còn gọi là điểm trung vị.

Nói cách khác: MED(X) là số thực m thỏa: $P(X < m) \leq 0.5; P(X > m) \leq 0.5$***. Nghĩa là: MED(X) là điểm chia đôi khối lượng xác suất của ĐLNN đó thành 2 phần có xác suất đều***≤ 0.5

Ví dụ:
X có luật phân phối như sau:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Rõ ràng không có Mod(X)
Med(X)=3 Vì $P(X < 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} < 0.5; P(X > 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \leq 0.5;$
Ví dụ:
X có luật phân phối như sau:

X	1	2	3	4	5
P	0.1	0.3	0.2	0.3	0.1

Mod(X)=2, Mod(X)=4
Med(X)=3 Vì $P(X < 3) = 0.1 + 0.3 = 0.4 < 0.5; P(X > 3) = 0.3 + 0.1 = 0.4 < 0.5;$

Ví dụ:
X là biến ngẫu nhiên có E(X)=2 có bảng phân phối xác suất:

X	0	2	x_3
P	0.3	0.5	P_3

a) Xác định x_3, P_3 .
b) Tìm D(X), Mod(X), Med(X).

GIẢI:

$$E(X) = 0 \times 0.3 + 2 \times 0.5 + x_3 \times P_3 = 2$$

$$\begin{cases} x_3 \times P_3 = 1 \\ 0.3 + 0.5 + P_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 5 \\ P_3 = 0.2 \end{cases}$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 0^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.5 + 5^2 \times 0.2 - 2^2 = 7 - 4 = 3$$

$$Mod(X) = 2, Med(X) = 2$$

Ví dụ:
Một thiết bị gồm 3 bộ phận hoạt động độc lập nhau. Xác suất để vào thời điểm t các bộ phận bị hỏng là: 0.2; 0.3; 0.5; Gọi X là "số bộ phận bị hỏng ở thời điểm t".
a) Lập bảng phân phối xác suất của X.
b) Tính E(X), D(X),Mod(X), Med(X)

GIẢI:
Gọi $A_1; A_2; A_3$ lần lượt là các biến cố" Bộ phận 1,2,3 hỏng ở thời điểm t".

$$P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = 0.8 \times 0.7 \times 0.5 = 0.28$$

$$P(A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3} + \overline{A_1}.A_2.\overline{A_3} + \overline{A_1}.\overline{A_2}.A_3) = 0.2 \times 0.7 \times 0.5 + 0.8 \times 0.3 \times 0.5 + 0.8 \times 0.7 \times 0.5 = 0.47$$

$$P(A_1.A_2.\overline{A_3} + A_1.\overline{A_2}.A_3 + \overline{A_1}.A_2.A_3) = 0.2 \times 0.3 \times 0.5 + 0.2 \times 0.5 \times 0.7 + 0.8 \times 0.3 \times 0.5 = 0.22$$

$$P(A_1.A_2.A_3) = 0.2 \times 0.3 \times 0.5 = 0.03$$

Ta có bảng PPXS:

X	0	1	2	3
P	0.28	0.47	0.22	0.03

Dùng máy tính bỏ túi ta có thể tính các đặc trưng của BNN X

$$E(X) = 1, D(X) = 0.62, \sigma(X) = 0.79, Mod(X) = 1, Med(X) = 1$$

Ví dụ:
Một hộp đựng 5 chai thuốc trong đó có 1 chai thuốc giả. Người ta lần lượt kiểm tra từng chai thuốc cho đến khi phát hiện chai thuốc giả thì dừng.
a) Phải kiểm tra trung bình bao nhiêu chai thuốc thì phát hiện được chai thuốc giả.
b) Số chai thuốc giả phải kiểm tra chắc chắn nhất để phát hiện chai thuốc giả.

GIẢI:

Gọi X là số chai thuốc phải kiểm tra đến khi phát hiện chai thuốc giả, $X=\{1;2;3;4;5\}$

Gọi $A_i\left(i=\overline{1,5}\right)$ là biến cố "Chai thứ i được kiểm tra thì phát hiện chai thuốc giả". Ta có:

$$P(A_1)=\frac{1}{5}$$

$$P\left(\overline{A_1}A_2\right)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=0.2$$

$$P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=0.2$$

$$P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4\right)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=0.2$$

$$P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}A_5\right)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=0.2$$

Ta có bảng PPXS:

X	1	2	3	4	5
P	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Dùng máy tính bỏ túi ta có thể tính các đặc trưng của BNN X

$$E(X)=2.8, Mod(X)=0, Med(X)=3$$

Ví dụ:

Một xạ thủ bắn 3 viên đạn vào 1 tấm bia vào 1 tấm bia với xác suất bắn trúng mỗi viên là 0.7.

a) Tính số viên đạn bắn trúng trung bình của xạ thủ đó. Số viên đạn bắn trúng chắc chắn nhất khi bắn 3 viên đạn của xạ thủ đó là bao nhiêu.

b)Tính tham số biểu thị sự ổn định của số viên đạn bắn trúng bia trung bình khi bắn 3 viên đạn của xạ thủ đó là bao nhiêu.

GIẢI:

Gọi X là " Số viên đạn bắn trúng bia của xạ thủ khi bắn 3 viên đạn". Ta có: $X=\{0;1;2;3\}$

$$P(X=0)=(0.3)^3=0.027$$

$$P(X=1)=0.7\times(0.3)^2\times 3=0.189$$

$$P(X=2)=0.3\times(0.7)^2\times 3=0.441$$

$$P(X=3)=(0.7)^3=0.343$$

b)Bảng PPXS

X	0	1	2	3
P	0.027	0.189	0.441	0.343

$$E(X)=2.1;D(X)=0.63;Mod(X)=2$$

Ví dụ:
Có 3 xạ thủ cùng bắn vào 1 mục tiêu(mỗi người bắn 1 viên đạn) trong cùng 1 số điều kiện nhất định. Xác suất mỗi người bắn trúng mục tiêu lần lượt là: 0.6; 0.7; 0.9. Gọi X là số viên đạn trúng mục tiêu.
a) Lập bảng PPXS của X.
b) Tính E(X);D(X);Mod(X).

GIẢI
a) Gọi X là số viên đạn trúng mục tiêu $\Rightarrow X=\{0;1;2;3\}$

$$P(X=0)=0.4\times 0.3\times 0.1=0.012$$
$$P(X=1)=0.6\times 0.3\times 0.1+0.4\times 0.7\times 0.1+0.4\times 0.3\times 0.9=0.154$$
$$P(X=2)=0.6\times 0.7\times 0.1+0.6\times 0.3\times 0.9+0.4\times 0.7\times 0.9=0.456$$
$$P(X=3)=0.6\times 0.7\times 0.9=0.378$$

b)Bảng PPXS

X	0	1	2	3
P	0.012	0.154	0.456	0.378

$$E(X)=2.2;\sigma(X)=0.735;D(X)=0.54;Mod(X)=2;Med(X)=2$$

BÀI TẬP
1) X là BNN có bảng PPXS như sau:

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.4	0.3

Tìm $E(X), \sigma(X), D(X), Mod(X), Med(X)$.

2)BNN X có hàm mật độ:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x & x\in[0;\Pi]\\ 0 & x\notin[0;\Pi]\end{cases}$$

a)Viết hàm PPXS của X

b) Tính $P\left(0<X<\frac{\Pi}{4}\right)$

c) Tính E(X)

3) Hàm mật độ của BNN X có dạng:

$$a)\, f(x)=\begin{cases}A\sin x & x\in[0;\Pi]\\ 0 & x\notin[0;\Pi]\end{cases} \quad b)\, f(x)=\begin{cases}Ax & x\in[0;1]\\ 0 & x\notin[0;1]\end{cases}$$

$$c)\, f(x)=\begin{cases}A\cos\Pi x & x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\\ 0 & x\notin\left[0;\frac{1}{2}\right]\end{cases} \quad d)\, f(x)=\begin{cases}A\frac{1}{x^4} & x\geq 1\\ 0 & x<1\end{cases}$$

a) Xác định A.

b) Viết hàm phân phối của X. Tính E(X), D(X)

4) Cho hàm mật độ xác suất của BNN X:

$$a)\, f(x)=\begin{cases}kx^2(4-x) & x\in[0;4]\\ 0 & x\notin[0;4]\end{cases} \quad b)\, f(x)=\begin{cases}k\left(x^2-1\right) & x\in[1;3]\\ 0 & x\notin[1;3]\end{cases}$$

Tìm k và lập hàm PPXS của X

5) Cho hàm mật độ xác suất của BNN X:

$$f(x)=\begin{cases}ke^{4x} & x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]\\ 0 & x\notin\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]\end{cases}$$

a) Tìm k b) Tính $P(X<0)$ c) Tìm hàm phân phối xác suất.

6) Cho hàm mật độ xác suất của BNN X:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{A}{\sqrt{9-x^2}} & x\in(-3;3)\\ 0 & x\notin(-3;3)\end{cases}$$

a) Tìm k b) Tính $P(X<0)$ c) Tìm hàm phân phối xác suất.

7) Cho hàm mật độ xác suất của BNN X:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Pi\sqrt{a^2-x^2}} & x\in(-a;a)\\ 0 & x\notin(-a;a)\end{cases}$$

Tìm E(X).

8) Cho hàm mật độ xác suất của BNN X:

$$f(x)=\begin{cases}A\sin 2x & x\in\left[0;\Pi/2\right]\\ 0 & x\notin\left[0;\Pi/2\right]\end{cases}$$

Tìm A

9) Cho hàm mật độ xác suất của BNN X:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\Pi}\cos^2 x & x\in\left[-\dfrac{\Pi}{2};\dfrac{\Pi}{2}\right]\\ 0 & x\notin\left[-\dfrac{\Pi}{2};\dfrac{\Pi}{2}\right]\end{cases}$$

Tìm $P\left(X<\dfrac{\Pi}{4}\right)$

10) Cho hàm mật độ xác suất của BNN X:

$$f(x)=\begin{cases}a\cos x & x\in\left[-\dfrac{\Pi}{2};\dfrac{\Pi}{2}\right]\\ 0 & x\notin\left[-\dfrac{\Pi}{2};\dfrac{\Pi}{2}\right]\end{cases}$$

a) Tìm a b)Tìm $P\left(0\le X<\dfrac{\Pi}{4}\right)$ $c)E(X)$

11)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9} & x\in(0;3)\\ 0 & x\notin(0;3)\end{cases}$$

a)Chứng minh f(x) là hàm mật độ XS b) Tính $P(1 < X < 2)$

12) Cho hàm mật độ xác suất của BNN X:

$$f(x)=\begin{cases} a\cos 2x & x\in\left[0;\dfrac{\Pi}{4}\right] \\ 0 & x\notin\left[0;\dfrac{\Pi}{4}\right] \end{cases}$$

a) Tìm a b)Tìm $P\left(X<\dfrac{\Pi}{6}\right)$ $c)$ Lập hàm PPXS của X

13) Cho hàm mật độ xác suất của BNN X

$$f(x)=\begin{cases} k(30-x) & x\in(0;30) \\ 0 & x\notin(0;30) \end{cases}$$

a) Tìm k b) Tính $P(X<15)$ c) Lập hàm PPXS

14) Cho hàm mật độ xác suất của BNN X

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-\frac{x}{2}} & x\in(0;+\infty) \\ 0 & x\notin(-\infty;0) \end{cases}$$

a) Tìm k b) Tính $P(X>0)$ c) Lập hàm PPXS.